خواص الدالة الزائدية .

إن جميع الخواص التي تحقق الدوال الزائدية من الساحة الحقيقية تحقق الدوال من الساحة العقدية مثلاً على سبيل المثال :

$$\boxed{ch^2 z - sh^2 z = 1}$$

$$ch^2 z - sh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z} - e^{2z} + 2 - e^{-2z}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$ch(-z) = ch(z)$$

$$sh(-z) = -sh(z)$$

$$sh(-z) = \frac{e^{-z} - e^{-(-z)}}{2} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2} = -\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = -sh z$$

$sh(z + 2\pi i) = sh z$ ومن هاتين العلاقتين نستنتج أن دالتي الجيب الزائدي

$ch(z + 2\pi i) = ch z$ والتجيب الزائدي هي دوال دورية دورها $2\pi i$.

الإثبات : $ch(z + 2\pi i) = \dfrac{e^{z+2\pi i} + e^{-z-2\pi i}}{2}$

لكن : $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 \quad ; \quad e^{-2\pi i} = 1$

لذلك يكون :

$$ch(z + 2\pi i) = \frac{e^{z+2\pi i} + e^{-z-2\pi i}}{2} \quad ; \quad ch(z + 2\pi i) = \frac{e^{z}.1 + e^{-z}.1}{2} = ch z$$

$ch(iz) = \cos(z)$ تعطي كل هذه العلاقات بين الجيب الزائدي والتجيب المثلثي

$sh(iz) = i\sin(z)$ والجيب الزائدي والجيب المثلثي

الإثبات :

$$ch(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$sh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \sin z$$

$$sh\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$sh\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2}$$

لكن $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \quad ; \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -i$

$$sh\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{i-(-i)}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$|\operatorname{sh} z|^2 = \operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y$$

لكن $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 z$

نعوض فنجد أن:

$$\boxed{|\operatorname{sh} z|^2} = \operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + (1 + \operatorname{sh}^2 x) \sin^2 y$$

$$= \operatorname{sh}^2 x [\cos^2 y + \sin^2 y] + \sin^2 y = \boxed{\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y}$$

$$|\operatorname{ch} z|^2 = \operatorname{ch}^2 x \cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x \sin^2 y$$

$\operatorname{sh}^2 x = 1 + \operatorname{ch}^2 x$

نعوض فنجد أن:

$$\boxed{|\operatorname{ch} z|^2} = (1 + \operatorname{sh}^2 x)\cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x \sin^2 y =$$

$$\cos^2 y (\operatorname{sh}^2 x (\cos^2 y + \sin^2 y) = \boxed{\cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x}$$

لإيجاد حلول المعادلة $\operatorname{sh} z = 0 \; ; \; \operatorname{ch} z = 0$

عندما $\operatorname{sh} z = 0 \Leftarrow |\operatorname{sh} z|^2 = 0$ أي أن

ومنه $\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y = 0$

$\operatorname{sh}^2 x = 0 \; ; \; \sin^2 y = 0$

$\operatorname{sh} x = 0 \; ; \; \sin y = 0$

$x = 0 \; ; \; y = n\pi \rightarrow z = n\pi i$

الحلول بالدوال الزائدية حلول تخيلية بينما بالدوال المثلثية حلول حقيقية

$\operatorname{ch} z = 0 \Leftarrow |\operatorname{ch} z|^2 = 0$

$$\cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x = 0$$

$$\cos y = 0 \quad \wedge \quad \operatorname{sh} x = 0$$

$$y = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad x = 0$$

$$z = x + iy = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) i$$

تذكرة:

$\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi \quad ; n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = n\pi + \frac{\pi}{2} \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

$\sin x = \sin y \rightarrow$ إما $x = y + 2n\pi$

أو $x = \pi - y + 2n\pi$

$\cos x = \cos y \rightarrow$ إما $x = y + 2n\pi$

أو $x = -y + 2n\pi$

مثال: أوجد حلول المعادلة $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}$

الحل: نفرض أن $z = x + iy$ فيكون

$$\operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y = \frac{1}{2}$$

حسب تعريف تساوي عددين عقديين نجد أن

$$\operatorname{ch} x \cos y = \frac{1}{2} \quad \dots (1)$$

$$\operatorname{sh} x \sin y = 0 \quad \dots (2)$$

من المعادلة (2): إما $\operatorname{sh} x = 0 \Leftarrow x = 0$ نعوض في (1) فنجد أن

$$\operatorname{ch} 0 \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \text{ إما}$$

أو $y = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi$

وبالتالي فإن الحلول هي $z = x + iy = 0 + i\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$

أو: $\sin y = 0 \Leftarrow y = n\pi$ نعوض في (1)

$$\operatorname{ch} x (\pm 1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} \text{ إما}$$

أو $\operatorname{ch} x = -\frac{1}{2}$

والمعادلتان مستحيلتا الحل لأن $\operatorname{ch} x \geq 1 \; ; \; \forall x \in R$ وكلاهما مرفوضتان

الدالة اللوغاريتمية:

إذا رمزنا للدالة اللوغاريتمية الطبيعية بالنسبة [للأساس النبري e] $\log$

يمكن أن نعرف الدالة اللوغاريتمية $w = \log z \quad \dots (1)$

بالعلاقة $\log z = \operatorname{Log} |z| + i\varphi$

حيث $|z| = r \; ; \; \varphi = \arg z$

عندئذ ولكن $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi \quad \dots (2)$

تكتب العلاقة (2) بالشكل $\log z = \operatorname{Log} r + i(\theta + 2n\pi) \quad \dots (3) \qquad n = 0, \pm 1, \dots$

[illegible]

حيث $-\pi \leq \theta = \operatorname{Arg} z \leq \pi$

ومن العلاقة (3) ... نستنتج أن الدالة اللوغاريتمية هي دالة متعددة القيم أي أنه

مقابل كل قيمة للمتغير z هناك عدد لانهائي من القيم للمتغير w

مثال: أوجد قيمة الدالة اللوغاريتمية $w = \log z$ عندما $z = -1 - i$

الحل:

$$w = \log(-1-i) = \mathrm{Log}(-1-i) + i\left(\frac{-3\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

$$= \mathrm{Log}\sqrt{2} + i\left(\frac{-3\pi}{4} + 2n\pi\right) \quad ; n = 0, \pm 1, \dots$$

ومن هنا نستنتج أن الدالة اللوغاريتمية دالة متعددة القيم

* إذا عوضنا بالعلاقة (3) كل n بصفر نحصل على ما يسمى بالقيمة الأساسية للدالة اللوغاريتمية ونرمز لها بالرمز Log وعندئذ تكون القيمة الأساسية معطاة بالعلاقة:

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$$

فالقيمة الأساسية للدالة اللوغاريتمية عندما $z = -1 - i$ هي

$$\mathrm{Log}(-1-i) = \log\sqrt{2} + i\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$$

هذه القيمة تسمى القيمة الأساسية للدالة اللوغاريتمية

إذا كانت $w = \log z$ حيث $z = \log|z| + i\theta$

$|z| > 0 \; ; \; -\pi < \theta \leq \pi$

عندئذ تكون الدالة $w = \log z$ هي دالة وحيدة القيمة أي أنه مقابل كل قيمة للمتغير z هناك قيمة واحدة فقط للمتغير w وهذه القيمة تقع ضمن الشريحة $-\pi < \theta \leq \pi$ أي أن كل نقطة من الشريحة $-\pi < \mathrm{Im}\, w \leq \pi$ تكون هناك (صورة) لنقطة واحدة وواحدة فقط من المستوى المعقد z

$w = \pi$

$w = -\pi$

أما إذا كان عرض الشريحة 4π فعندئذ تكون الدالة $w = \log z$ دالة متعددة القيم أي أن كل قيمة لـ z هناك قيمتين لـ w

وهنا عند دراستنا للدالة الأسية أن الدالة $w = e^{z}$ حيث $-\pi < \mathrm{Im}\, z \leq \pi$ هي دالة أحادية القيمة بمعنى أن كل نقطة w هي صورة لنقطة واحدة وواحدة فقط من الشريحة $-\pi < \mathrm{Im}\, z \leq \pi$ وهذه النقطة هي $z = \ln r + i\theta$

إذا استبدلنا في $w = e^{z}$ كل (z بـ w) وكل (w بـ z) نجد $z = e^{w}$

$-\pi < \mathrm{Im}\, w \leq \pi$ وبالتالي $w = \log r + i\theta$

ومن هذا نستنتج

. $r>0 \;;\; -\pi < \theta < \pi$ علاوة على ذلك فإن:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot 1 = \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0 = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

أي أن الدالة $w = \log z$ هي دالة تحليلية

(قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط النطاق $r>0 \;;\; -\pi<\theta<\pi$)

وبالتالي فهي تحليلية عند جميع نقاط هذا النطاق والمشتقة الأولى لهذه الدالة تعطى بـ

$$\frac{d}{dz}(\log z) = e^{-i\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\,\frac{\partial v}{\partial r}\right] = e^{-i\theta}\left[\frac{1}{r} + i0\right] = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

حيث $z = re^{i\theta} \;;\; -\pi<\theta<\pi \;;\; r>0$

من جهة ثانية وعلى وجه العموم إذا كانت $w = \log z$ حيث

$$\log z = \mathrm{Log}\, r + i\psi \;;\; r>0 \;;\; \alpha < \psi \le \alpha + 2\pi \quad \ldots(*)$$

"عبارة عن عرض النطاق 2π فإن هذه الدالة وحيدة القيمة"

$u(r,\psi) = \mathrm{Log}\, r \qquad v(r,\psi) = \psi$

الدالة u دالة معرفة ومستمرة ابتداءً من الصفر أما بالنسبة للدالة v عندما تسعى النقطة (r,ψ) نحو أي نقطة من نقاط الشعاع $\psi = \alpha$ بالاتجاه الموجب للدوران فإن قيمة هذه الدالة تساوي α بينما قيمة الدالة v عندما تسعى النقطة (r,ψ) نحو أي نقطة من نقاط الشعاع $\psi=\alpha$ بالاتجاه السالب للدوران فإن قيمة هذه الدالة تساوي $\alpha + 2\pi$

نلاحظ أن قيمة الدالة اختلفت باختلاف الطريق أي أن الدالة v غير مستمرة عند نقاط الشعاع $\psi=\alpha$ ومنه نستنتج أن الدالة $w=\log z$ غير مستمرة وهي غير قابلة للاشتقاق

أي نقاط الشعاع $\psi=\alpha$ هي نقاط شاذة للدالة المعرفة بالعلاقة $(*)$

بينما هذه الدالة أي $w = \log z$ غير مستمرة فهي غير قابلة للاشتقاق حيث

$$\log z = \mathrm{Log}\, r + i\psi \qquad (r>0 \;;\; \alpha<\psi<\alpha+2\pi)$$

تكون دالة تحليلية عند جميع نقاط النطاق الموافق وذلك لأن

هذه المشتقات الجزئية كما نلاحظ $\quad \dfrac{\partial v}{\partial \psi} = 1 \qquad \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}$

معرفة ومستمرة عند كل نقطة $\quad \dfrac{\partial v}{\partial r} = 0 \qquad \dfrac{\partial u}{\partial \psi} = 0$

من نقاط النطاق الموافق وعلاوة على ذلك تحقق شرطي كوشي ريمان بالصيغة القطبية.

أي أن الدالة

$$\log = \log z + i\varphi$$

قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط هذا النطاق المرافق $(r>0 \ ; \ \alpha<\varphi<\alpha+2\pi)$

وهذا ابرهن بمعنى أن هذه الدالة تحليلية على هذا النطاق المرافق والمشتقة الأولى:

$$\frac{d}{dz}(\log z) = e^{-i\varphi}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right] = e^{-i\varphi}\left[\frac{1}{r} + i0\right] = \frac{1}{r}e^{-i\varphi} = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{z}$$

ومن العلاقة * نستنتج أن الدالة اللوغارتمية المتعددة القيم عدد غير منتهٍ من الحلول كل فرع من هذه الفروع هو عبارة عن دالة تحليلية على نطاق محدد

ملاحظة: الدالة المعرفة بالعلاقة

$$\operatorname{Log} z = \log r + i\theta \qquad [r>0 \ ; \ -\pi<\theta<\pi]$$

تدعى دالة الفرع الأساسي للدالة اللوغارتمية متعددة القيم

تعريف:

نقول عن الدالة $w=f(z)$ أنها فرع من دالة متعددة القيم $F(z)$ إذا وفقط إذا كانت $w=f(z)$ دالة تحليلية على نطاق ما، وكانت قيم $f(z)$ تتطابق مع قيم $F(z)$ على هذا النطاق.

فمثلاً $w = \log z = \operatorname{Log} r + i\theta$

$[r>0 \ , \ -\pi<\theta<\pi]$ الفرع الأساسي للدالة اللوغارتمية متعددة القيم والتي هي

$$\log z = \operatorname{Log}|z| + i(\theta+2\pi n) \qquad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

كما أن الدالة بالعلاقة * هي أيضاً فرع من الدالة اللوغارتمية متعددة القيم

تعريف:

الخط المستقيم (المنحني) الذي تكون نقاطه هي عبارة عن نقاط شاذة لكل فرع دالة متعددة القيم ندعوه الفرع القاطع

أي أن الفرع القاطع للدالة

$$\log z = \log r + i\theta$$

$$-\pi<\theta<\pi \quad , \quad r>0$$

هو نقاط الشعاع $\theta=\pi$

$\varphi=\alpha_1$, $\varphi=\alpha_0$, $\theta=\pi$

أما الفرع القاطع للدالة $\log z = \text{Log}\, r + i\varphi \quad (r > 0\,,\ \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi)$

هي نقاط الشعاع $\varphi = \alpha$.

النقطة المشتركة بين جميع الأفرع القاطعة ندعوها نقطة تفرع

من هذا التعريف نستنتج أن النقطة الفرعية للدالة $w = \log z$

هي النقطة $z = 0$:

$$= \log|z| + i(\theta + 2n\pi)$$

ملاحظة: نعلم بأن نقاط الشعاع $\theta = \pi$ هو الفرع القاطع للدالة

$$\text{Log}\, z = \log r + i\theta \qquad r > 0\,,\ -\pi < \theta < \pi$$

أي أن النقاط الشاذة للدالة السابقة تحقق

$$x \leq 0 \ \wedge \ y = 0$$

$$w = \text{Log}\,(z - i)$$

نفرض $z = x + iy$ عندئذ

$$w = \text{Log}\,(z - i) = \text{Log}\,(x + iy - i) = \text{Log}\,(x + i(y-1))$$

أي أن النقاط الشاذة لهذه الدالة

النقاط الشاذة

$y = 1$

x

$$x \leq 0 \ \wedge \ y - 1 = 0$$

$$x \leq 0 \ \wedge \ y = 1$$

★ خواص الدوال اللغارتمية :

(1) $e^{\log z} = z$

الاثبات : بفرض أن $z = re^{i\varphi}$ عندئذ

$$e^{\log z} = e^{\text{Log}\, r + i\varphi}$$

$$= e^{\text{Log}\, r}\, e^{i\varphi} = re^{i\varphi} = z$$

(2) $\log e^{z} \neq z$

وذلك لأن:

$$\text{Log}\, e^{z} = \log|e^{z}| + i(\text{Arg}\, e^{z} + 2n\pi$$

$$= \text{Log}\, e^{x} + i(y + 2n\pi)$$

$$= x + iy + i2n\pi = z + 2n\pi i \neq z$$

Alnour

(3) $\log(z_1 . z_2) = \log z_1 + \log z_2$

إن هذه العلاقة صحيحة وذلك من خلال مجموعات لأن الدالة اللوغارتمية هي دالة متعددة القيمة. لكل قيمة من قيم $\log(z_1 . z_2)$ يمكن التعبير عن هذه القيمة كمجموع قيمتين إحداهما من قيم $\log z_1$ والثانية من قيم $\log z_2$.

الإثبات: إذا كان $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ، $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ عندئذ

$$\log(z_1 . z_2) = \text{Log}|r_1 . r_2| + i(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$= \text{Log}\, r_1 + \text{Log}\, r_2 + i\varphi_1 + i\varphi_2 = \text{Log}\, r_1 + i\varphi_1 + \text{Log}\, r_2 + i\varphi_2$$

$$= \log z_1 + \log z_2$$

مثال توضيحي:

إذا كان $z_1 = i$; $z_2 = -1+i$ عندئذ

$$z_1 . z_2 = i(-1+i) = -1-i$$

$$\log(z_1 . z_2) = \log(-1-i) = \text{Log}|-1-i| + i(\text{Arg}(-1-i) + 2n\pi)$$

$$= \text{Log}\sqrt{2} + i\left(-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

من أجل $n=3$ نحصل على إحدى قيم الدالة اللوغارتمية هي

$$\log(-1-i) = \text{Log}\sqrt{2} + i\left(-\frac{3\pi}{4} + 6\pi\right) = \text{Log}\sqrt{2} + i\,\frac{21\pi}{4}$$

$$\log z_1 = \log i = \text{Log}|i| + i(\text{Arg}(i) + 2n\pi) = 0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

من أجل $n=2$ نحصل على إحدى قيم الدالة $\log z$

$$\log i = i\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right) = i\,\frac{9\pi}{2}$$

$$\log z_2 = \log(-1+i) = \text{Log}|-1+i| + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right) = \text{Log}\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

من أجل $n=0$ نحصل على إحدى قيم الدالة اللوغارتمية تكون

$$\log(-1+i) = \text{Log}\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

بالمقارنة:

$$\text{Log}\sqrt{2} + i\,\frac{21\pi}{4} = i\,\frac{9\pi}{2} + \text{Log}\sqrt{2} + i\,\frac{3\pi}{4} = \text{Log}\sqrt{2} + i\left(\frac{9\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)$$

ملاحظة: إذا استبدلنا في العلاقة الواردة في الخاصة (3) متعددة القيم $\log$ بوحيدة القيمة Log فلا تتحقق المساواة.

تمرين (1): أثبت أن $\cos 2Z_1 - \cos 2Z_2 = -2\sin(Z_1+Z_2)\sin(Z_1-Z_2)$

ثم أثبت أنه إذا كان $\cos Z_1 = \cos Z_2$ فإن

$$Z_1 + Z_2 = 2n\pi \quad \wedge \quad Z_1 - Z_2 = 2n\pi$$

الحل:

$$-2\sin(Z_1+Z_2)\sin(Z_1-Z_2) = -2\,\frac{e^{i(Z_1+Z_2)} - e^{-i(Z_1+Z_2)}}{2i}\cdot\frac{e^{i(Z_1-Z_2)} - e^{-i(Z_1-Z_2)}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{i(Z_1+Z_2)} - e^{-i(Z_1+Z_2)}\right]\cdot\left[e^{i(Z_1-Z_2)} - e^{-i(Z_1-Z_2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2iZ_1} - e^{2iZ_2} - e^{-2iZ_2} + e^{-2iZ_1}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(e^{2iZ_1} + e^{-2iZ_1}\right) - \left(e^{2iZ_2} + e^{-2iZ_2}\right)\right]$$

$$= \frac{e^{2iZ_1} + e^{-2iZ_1}}{2} - \frac{e^{2iZ_2} + e^{-2iZ_2}}{2} = \cos 2Z_1 - \cos 2Z_2 = L_2$$

وبما أن $\cos Z_1 = \cos Z_2 \Leftarrow$ فإن $\cos Z_1 - \cos Z_2 = 0$

$$-2\sin\left(\frac{Z_1+Z_2}{2}\right)\odot\sin\left(\frac{Z_1-Z_2}{2}\right) = 0$$

ومنه إما

$$\sin\left(\frac{Z_1+Z_2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{Z_1+Z_2}{2} = n\pi \Rightarrow Z_1 + Z_2 = 2n\pi$$

أو $$\sin\left(\frac{Z_1-Z_2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{Z_1-Z_2}{2} = n\pi \Rightarrow Z_1 - Z_2 = 2n\pi$$

تمرين (2): أثبت أن

$$Re(\cot Z) = \frac{2\sin 2Z}{e^{2y} + e^{-2y} - \cos 2x}$$

$$Re(\tan Z) = \frac{2\sin 2Z}{e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x}$$

الحل:

$$\cot Z = \frac{\cos Z}{\sin Z} = \frac{\cos x\, ch y - i\sin x\, sh y}{\sin x\, ch y + i\cos x\, sh y}$$

نضرب البسط والمقام بـ $\sin x\, ch y - i\cos x\, sh y$

$$= \frac{(\cos x\sin x\, ch^2 y - \sin x\cos x\, sh^2 y) + (-\cos^2 x\, ch y\, sh y - \sin^2 x\, ch y\, sh y)}{\sin^2 x\, ch^2 y + \cos^2 x\, sh^2 y}$$

ومنه فإن

$$Re(\cot z) = \frac{\cos x \sin x}{\sin^2 x \, ch^2 y + \cos^2 x \, sh^2 y} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\sin^2 x \, ch^2 y + (1-\sin^2 x) sh^2 y}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\sin^2 x (ch^2 y - sh^2 y) + sh^2 y} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\sin^2 x + sh^2 y} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1+ch^2 y}{2}}$$

$$= \frac{\sin 2x}{ch^2 2y - \cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{2} - \cos 2x} = \frac{\sin 2x}{e^{2y}+e^{-2y} - \cos 2x}$$

* $$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin x \cos y + i \cos x \, sh y}{\cos x \, ch y - i \sin x \, sh y}$$

$$= \frac{(\sin x \, ch y + i \cos x \, sh y)(\cos x \, ch y - i \sin x \, sh y)}{\cos^2 x \, ch^2 y + \sin^2 x \, sh^2 y}$$

$$= \frac{ch^2 y \sin x \cos x - \sin x \cos x \, sh^2 y + i(sh y \, ch y \cos^2 x + \sin^2 x \, sh y \, ch y)}{\cos^2 x \, ch^2 y + \sin^2 x \, sh^2 y}$$

$$Re(\tan z) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x \, ch^2 y + \sin^2 x \, sh^2 y} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\cos^2 x \, ch^2 y + (1-\cos^2 x) sh y}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\cos^2 x + sh^2 y} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+sh y}{2}} = \frac{2\sin 2x}{\cos 2x + ch 2y}$$

$$= \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \frac{e^{2y}+e^{-2y}}{2}} = \frac{2}{e^{2y}+e^{-2y}+2\cos 2x}$$

تمرين (3) : أثبت أن :

- $\text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\log 2 + i\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

$$\text{Log}(1-i) = \log|1-i| + i \, \text{Arg}(1-i)$$
$$= \log\sqrt{2} + i\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\text{Log}\, 2 + i\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

- $\text{Log}(-2ei) = 1 + \log 2 - i\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$= \log|-2ei| + i \, \text{Arg}(-2ei)$$
$$= \log 2e + i\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \log 2 + \log e + i\left(\frac{-\pi}{2}\right)$$
$$= 1 + \log 2 + i\left(\frac{-\pi}{2}\right)$$

Alnour

- $\log(-2) = \text{Log}\, 2 + i(\pi + 2n\pi)$

$$\log z = \text{Log}|z| + i(\text{Arg}\, z + 2n\pi)$$ نعلم.

$$= \text{Log}|-2| + i(\pi + 2n\pi) = \text{Log}\, 2 + i(\pi + 2n\pi)$$

- $\log(3i) = \text{Log}\, 3 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$

$$\log(3i) = \text{Log}|3i| + i(\text{Arg}(3i) + 2n\pi)$$

$$= \text{Log}\, 3 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

تمرين (٤): إذا كان:

$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \wedge \quad z_2 = i$

. فأثبت أن العلاقة محققة

$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$

. ثم بين أن العلاقة غير محققة

$\text{Log}\, z_1 z_2 = \text{Log}\, z_1 + \text{Log}\, z_2$

. الحل:

$z_1 z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) i = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$

$\log z_1 z_2 = \log\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \text{Log}\left|-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right| + \left(\text{Arg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) + 2n\pi\right)$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\theta = \frac{\pi}{6} + \pi k \quad ; \quad k = -1 \Rightarrow \theta = \frac{-5\pi}{6}$ تكون في الربع الثالث

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \text{Log}\, 1 + i\left(\frac{-5\pi}{6} + 2n\pi\right) = i\left(\frac{-5\pi}{6} + 2n\pi\right)$

$\tan\theta = \frac{\pi}{6}$

من أجل $n=1$ نجد

$$\log z_1 z_2 = \frac{7\pi}{6} i$$

$\log z_1 = \log\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{Log}\left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| + i\left(\text{Arg}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2n\pi\right)$

$\tan\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow -\tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$= \text{Log}\, 1 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right) \rightarrow$

$\frac{14\pi}{3}$ من أجل $n=2$

$\log z_1 = i\left(\frac{14}{3}\pi\right)$

$\log z_2 = \log i = \text{Log}|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$

من أجل $n=-2$ يكون

$\log z_2 = -i\frac{7\pi}{2}$

Alnour

ومنه نجد أن

$$\log z_1 . z_2 = \log z_1 . \log z_2$$

ومن جهة ثانية

$$\log(z_1 . z_2) = \text{Log}\left|\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right| + i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= \text{Log}\, 1 + i\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-5\pi}{6} i$$

$$\text{Log}\, z_1 = \text{Log}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{Log}\left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| + i\frac{2\pi}{3} = i\frac{2\pi}{3}$$

ونلاحظ أن

$$\log z_1 . z_2 \neq \text{Log}\, z_1 . \text{Log}\, z_2$$

تمرين (5): إذا كانت $\log z = \text{Log}|z| + iy$ حيث $|z| > 0$, $\frac{3\pi}{4} < y < \frac{11\pi}{4}$ دالة وحيدة القيمة

(مستمرة ليست يوجد بها قطعات أي:) $\frac{11\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} = 2\pi \rightarrow$

فأثبت أن: $\text{Log}\, i^3 \neq 3\,\text{Log}\, i$

(وبالتالي يجب أن يكون طول الفترة فقط 2π أما إذا كان أكبر من 2π تقع $2n\pi$)

الحل:

$$\log i^3 = \log(-i) = \text{Log}|-i| + iy$$

$$= \text{Log}\, 1 + i\frac{3\pi}{2} = i\frac{3\pi}{2}$$

$$3\,\text{Log}\, i = 3\,[\text{Log}\, i + iy] = 3\,[0 + iy] = 3iy$$

$$\arg(i) = \text{Arg}(i) + 2n\pi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi = \frac{5\pi}{2}$$

$n = 1, 2$

$$= 3i\,\frac{5\pi}{2} = \frac{15\pi i}{2}$$

$$\log i^3 \neq 3 \log i$$

$\log \frac{(z_1)}{(z_2)} = \log z_1 - \log z_2$

هذه المساواة صحيحة والواقع مساواة بين مجموعات، لكن نفهم هذه العلاقات على الشكل الآتي: أي قيمة من قيم $\log \frac{z_1}{z_2}$ يمكن التعبير عنها كفرق بين قيمتين إحداهما من قيم $\log z_1$ والثانية من قيم $\log z_2$. وإذا ما تم استبدال $\log$ بـ Log فقد لا تتحقق المساواة.

(5) إذا كان $z = re^{i\theta}$; $\theta = \text{Arg } z$

عندئذ يكون: $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

وبالتالي يكون:

$\log z^{\frac{1}{n}} = \text{Log } r^{\frac{1}{n}} + i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2p\pi\right)$

وبالتالي يكون: $p = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

$$\log z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\text{Log } r + i\left(\frac{\theta + 2(np+k)\pi}{n}\right) \quad \ldots *$$

من جهة ثانية نجد أن:

$$\frac{1}{n}\log z = \frac{1}{n}\left[\text{Log } r + i(\theta + 2q\pi)\right] \qquad q = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

$$= \frac{1}{n}\text{Log } r + i\,\frac{\theta + 2q\pi}{n}$$

لكن نعلم أن:

حيث $\frac{q}{n} = p + \frac{k}{n}$; $0 \le k \le n-1$

أي أن

$q = np + k$

نعوض فنجد أن

$$\frac{1}{n}\log z = \frac{1}{n}\text{Log } r + i\left(\frac{\theta + 2(np+k)\pi}{n}\right) \quad \ldots **$$

من * و ** نستنتج أن

$$\log z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log z$$

وهذه المساواة هي مساواة بين مجموعات، أي قيمة من قيم الطرف الأيسر هناك قيمة وقيمة واحدة فقط تقابلها من قيم الطرف الأيمن.

وبالاستفادة من هذه العلاقة والخاصة (1) نجد أن

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log z}$$

ومن هذه العلاقة نستنتج من أجل أي قيمة نختارها من قيم $\log z$ هناك n قيمة تقابلها حسب العلاقة الأخيرة.

بشكل عام يمكن أن نثبت أنه $\log z^n \neq n \log z$

وذلك من أجل قيم معينة لـ z وقيم معينة لـ n

مثال توضيحي:

إذا كان $z = i$, $n = 2$

$$\log z^n = \log i^2 = \log -1 = \text{Log}|-1| + i(\pi + 2\pi n) = (2n+1)\pi i$$

لكن:

$$n \log z = 2 \log i = 2\left[\text{Log}|i| + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i\right]$$

$$= 2\left[0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right] = (\pi + 4n\pi) i = (4n+1)\pi i$$

ونلاحظ بأنه $\log z^n \neq n \log z$

ولكن هذه العلاقة قد تتحقق وقد لا تتحقق من أجل قيم معينة لـ z وقيم معينة لـ n إذا ما تم استبدال $\log$ بـ Log

كما يوضح المثالان الآتيان:

(1) إذا كان $z = 1+i$, $n = 2$ عندئذ

$$\text{Log}(1+i)^2 = \text{Log}\, 2i = \log|2i| + i\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{Log}\, 2 + i\frac{\pi}{2}$$

$$2\,\text{Log}(1+i) = 2\left[\text{Log}|1+i| + i\frac{\pi}{4}\right] = 2\left[\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right] = \log 2 + i\frac{\pi}{2}$$

نستنتج من ذلك:

$$\text{Log}(1+i)^2 = 2\,\text{Log}(1+i)$$

أي أن في هذه الحالة $\text{Log}\, z^n = n\, \text{Log}\, z$

(2) إذا كان $z = -1+i$, $n = 2$ عندئذ

$$\text{Log}(-1+i)^2 = \text{Log}(-2i) = \text{Log}|-2i| + i\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \log 2 - i\frac{\pi}{2}$$

$$2\,\text{Log}(-1+i) = 2\left[\log|-1+i| + i\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 2\left[\log\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$= \text{Log}\, 2 + i\frac{3\pi}{2}$$

ونلاحظ بأن $\text{Log}(-1+i)^2 \neq 2\,\text{Log}(-1+i)$ عندئذ

$$\log(z)^n \neq n\, \text{Log}(z)$$

دالة الأس المركبة:

نعلم أن: $z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log z}$

كما نعلم أن: $e^{\log z} = z$

وبالتالي فإنه: إذا كان c عدد حقيقي ثابت فإن دالة الأس المركبة أي الدالة $f(z) = z^c$ تعرف من خلال العلاقة:

$$z^c = e^{c \log z}$$

وبما أن الدالة اللغاريتمية كما نعلم دالة متعددة القيم فعندئذ نستنتج بأن دالة الأس المركبة $f(z) = z^c$ هي دالة متعددة القيم

مثال للتوضيح:

$$(1+i)^i = e^{i\log(1+i)}$$

$$\log(1+i) = \text{Log}|1+i| + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

ومنه فإن

$$(1+i)^i = e^{i\left[\log\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\right]} = e^{-\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + \frac{i}{2}\log 2}$$

نلاحظ من خلال العلاقة الأخيرة أن دالة الأس المركبة هي دالة متعددة القيم.

نعلم أن الدالة

$$\log z = \text{Log}|z| + i\varphi$$

$$|z| > 0 \;,\; \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi$$

هي دالة وحيدة القيمة وتحليلية على النقاط المرافقة وبالتالي فإن الدالة

$$z^c = e^{c\log z} \qquad |z| > 0 \;,\; \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi$$

★ وبالتالي هي دالة وحيدة القيمة وتحليلية على النقاط المرافقة

نستنتج أن دالة الأس المركبة z^c هي دالة لها عدد

وبما أن الدالة المعرفة بالعلاقة تحليلية على النقاط المرافقة. فعندئذ تكون هذه الدالة قابلة للاشتقاق والمشتقة الأولى لها تعطى بالصيغة

$$\frac{d}{dz} z^c = \frac{c}{z} e^{c \log z} = \frac{c\, e^{c \log z}}{e^{\log z}} = c\, e^{(c-1)\log z} = c\, z^{c-1}$$

ومن الحالة الخاصة عندما $\pi = \alpha$ فإن

$$z^c = e^{c \log z} \quad ; \ |z|>0 \qquad -\pi < \theta < \pi$$

وهذه الدالة تدعى الفرع الأساسي للدالة الأسية المركبة وقيمة هذه الدالة عند أي نقطة من نقاط النطاق المرافق ندعوها القيمة الأساسية للدالة الأسية المركبة.

مثال: أوجد الفرع الأساسي للدالة $f(z) = z^{2i}$ ثم أوجد القيمة الأساسية لهذا الفرع عند النقطة $z = i$.

$$\star \quad z^{2i} = e^{2i \log z} = e^{2i[\log|z| + i\theta]} \qquad -\pi < \theta < \pi \quad ; \ |z|>0$$

$$= e^{-2\theta + 2i \log|z|} = e^{-2\theta + i \log|z|^2}$$

القيمة الأساسية

$$(i)^{2i} = e^{-2\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \log|i|^2} = e^{-\pi + i \log 1} = e^{-\pi}$$

الدوال العكسية:

نعلم أنه إذا كانت $w = \sin z \leftarrow z = \sin^{-1} w$

أو

$z = \arc \sin w$

أي أن الدالة العكسية لدالة الجيب المثلثي من الشكل:

$w = \sin^{-1} z$ أو $w = \arc \sin z$

إذا كانت $z = \sin w$ وبالتالي $w = \arc \sin z$

بحل $z = \sin w$

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

$$2iz = e^{iw} - e^{-iw}$$

نضرب e^{iw}

$$e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0$$

$$e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0$$

وهذه المعادلة هي من الدرجة الثانية بالنسبة لـ e^{iw}

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2iz)^2 - 4(1)(-1) = 4 - 4z^2 = 4(1-z^2)$$

ومنه فإن

$$e^{iw} = \frac{2iz + 2\sqrt{1-z^2}}{2} = iz + \sqrt{1-z^2}$$

ومنه فإن

$$iw = \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

$$w = -i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

أي أن

$$\boxed{\arcsin z = -i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)}$$

ونلاحظ من خلال العلاقة الأخيرة أن الدالة العكسية لدالة الجيب المثلثي هي دالة متعددة القيم بسبب الأول وجود الدالة $\sqrt{1-z^2}$ إذ أن هذه الدالة لها قيمتين مقابل كل قيمة z!

والسبب الثاني وجود الدالة اللوغاريتمية نعلم بأن الدالة اللوغاريتمية هي دالة متعددة القيم إذا أخذنا أحد فرعي الدالة $\sqrt{1-z^2}$ وأحد فروع الدالة اللوغاريتمية متعددة القيم عندئذ تكون الدالة $\arcsin z$ هي دالة وحيدة القيمة وتحليلية على النطاق المعتبر، وبما أنها تحليلية عندئذ تكون هذه الدالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من هذا النطاق المعتبر والمشتقة الأولى تعطى بالصيغة:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\frac{d}{dz} \arcsin z = -i \frac{\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)'}{iz + \sqrt{1-z^2}} = -i \frac{i + \frac{-2z}{2\sqrt{1-z^2}}}{\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)} = -i \frac{i\sqrt{1-z^2} - z}{\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)\left(\sqrt{1-z^2}\right)}$$

$$= \frac{iz + \sqrt{1-z^2}}{\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)\left(\sqrt{1-z^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

مثال: اعتماداً على علم الدالة العكسية أوجد حلول المعادلة $\sin z = 3$

الحل:

إذا كان $\sin z = 3 \Leftarrow z = \arcsin z$

$$z = \arcsin 3 = -i \log\left(i3 + \sqrt{1-9}\right)$$

$$= -i \log\left(i3 + \sqrt{-8}\right) = -i \log\left(i3 \pm 2\sqrt{2}\, i\right)$$

$$= -i\left[\operatorname{Log}|(3 \pm 2\sqrt{2})i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right] \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$Z = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - i\operatorname{Log}(3 \pm 2\sqrt{2})$$

المتبنيين متساويتين للأحد

$$Z = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\operatorname{Log}(3 \mp 2\sqrt{2})$$

تم الحصول على من المثال وتكرار أعرض على ساتا

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - i\log(3 \pm 2\sqrt{2}) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\operatorname{Log}(3 + 2\sqrt{2})^{-1}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\operatorname{Log}\left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\operatorname{Log}\frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\operatorname{Log}\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\operatorname{Log}(3 \mp 2\sqrt{2})$$

دالة

إذا كان $w = \cos Z$ فإن $Z = \cos^{-1} w$

$Z = \arccos w$

أي أن الدالة العكسية لدالة الجيب المثلثي من الشكل:

إذا كان $Z = \cos w$ $w = \cos^{-1} Z$ $w = \arccos Z$

$Z = \arccos w$

$$Z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} \Rightarrow 2Z = e^{iw} + e^{-iw} \Rightarrow e^{iw} - 2Z + e^{-iw} = 0 \Rightarrow$$

$$e^{2iw} - 2Z e^{iw} + 1 = 0$$

وهذه معادلة هي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ e^{iw} عندئذ

$$\Delta = (-2Z)^2 - 4 = -4(1 - Z^2)$$

$$e^{iw} = \frac{2Z + i2\sqrt{1-Z^2}}{2} = Z + i\sqrt{1-Z^2} \Rightarrow$$

$$iw = \log(Z + i\sqrt{1-Z^2})$$

$$w = -i\log(Z + i\sqrt{1-Z^2}) \qquad \arcsin Z = -i\log(iZ + \sqrt{1-Z^2})$$

$$\boxed{\arccos Z = -i\log(Z + i\sqrt{1-Z^2})}$$

هذه الدالة هي دالة متعددة القيم لسببين الأول: وجود الدالة $\sqrt{1-Z^2}$ وهذه الدالة ثنائية القيمة تقابل كل قيمة لـ Z والسبب الثاني وجود الدالة $\log$ ونعلم بأنها دالة متعددة القيم فإذا ما أخذنا أصغر غصن للدالة $\sqrt{1-Z^2}$ وأصغر فرع للدالة اللغارتمية عندئذ العلاقات الأخيرة تمثل دالة وحيدة القيمة وتحليلية على المناطق المعتبرة وبما أنها تحليلية فهي قابلة للاشتقاق ومشتقاتها كالتالي:

Alnour

المحاضرة 15

تمرين: إذا كان $\log z = \text{Log}\, r + i\varphi$

تمرين: أثبت أن $\text{arc}\,\text{ch}\, z = \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

الحل: $w = \text{ch}\, z \Leftarrow$

$z = \text{ch}^{-1} w$

$z = \text{arc}\,\text{ch}\, w$

$z = \text{ch}\, w \Leftarrow$

$w = \text{ch}^{-1} z = \text{arc}\,\text{ch}\, z$

$z = \text{ch}\, w = \dfrac{e^{w} + e^{-w}}{2} \Rightarrow 2z = e^{w} + e^{-w}$

$e^{w} - 2z + e^{-w} = 0$

$e^{2w} - 2z e^{w} + 1 = 0$

$\Delta = (-2z)^2 - 4(1)(1) = 4z^2 - 4 = 4(z^2 - 1)$

$e^{w} = \dfrac{2z + 2\sqrt{z^2 - 1}}{2} = z + \sqrt{z^2 - 1}$

$w = \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

$\text{arc}\,\text{ch}\, z = \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

تمرين: أثبت أن <u>مهم</u>

$$\text{arc}\,\text{th}\, z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$$

الإثبات: نعلم أن

$w = \text{Th}\, z \Leftarrow$

$z = \text{th}^{-1} w = \text{arc}\,\text{th}\, w$

$z = \text{th}\, w \Leftarrow$

$w = \text{arc}\,\text{th}\, z$

نعوض بالمعرفة: $z = \text{Th}\, w = \dfrac{\text{sh}\, w}{\text{ch}\, w} = \dfrac{\frac{e^{w} - e^{-w}}{2}}{\frac{e^{w} + e^{-w}}{2}} = \dfrac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}}$

$z(e^{w} + e^{-w}) = e^{w} - e^{-w}$

$z e^{w} + z e^{-w} = e^{w} - e^{-w}$

$z e^{2w} + z = e^{2w} - 1$

$1 + z = e^{2w} - z e^{2w}$

$1 + z = (1 - z) e^{2w}$

$e^{2w} = \dfrac{1+z}{1-z} \quad ; z \neq \pm 1$

$$2w = \log \frac{1+z}{1-z} \Rightarrow w = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$$

$$\operatorname{arc\,th} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} \quad ; \; z \neq \pm 1$$

تمرين (3): أوجد جميع قيم المقدار

$(1+i)^i$

$\left[-\frac{e}{2} - \frac{e\sqrt{3}}{2} i\right]^{3\pi i}$

الحل: نعلم أن $z^c := e^{c \log z}$

$$* \ldots \; (1+i)^i = e^{i \log(1+i)}$$

$$\log(1+i) = \operatorname{Log}|1+i| + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

$$i \log(1+i) = -\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + i \log\sqrt{2}$$

بالتعويض في * نجد:

$$(1+i)^i = e^{-\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + i \log\sqrt{2}}$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)} \left[\cos(\operatorname{Log}\sqrt{2}) + i \sin(\operatorname{Log}\sqrt{2})\right] \quad ; n = 0, \pm 1, \pm 2$$

$$\left[-\frac{e}{2} - \frac{e\sqrt{3}}{2} i\right]^{3\pi i} = e^{3\pi i \log\left[-\frac{e}{2} - i\frac{e\sqrt{3}}{2}\right]}$$

$$\log\left[-\frac{e}{2} - ie\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \operatorname{Log}\left|-\frac{e}{2} - ie\frac{\sqrt{3}}{2}\right| + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{e\sqrt{3}}{2}}{-\frac{e}{2}} = \sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\theta = \frac{\pi}{3} + n\pi$ ومنه $n=1$ ← $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ، يتحقق

$-\pi < \theta \leq \pi$

وبتعويض $n=-1$ نجد

$$\operatorname{Arg}(z) = \frac{-2\pi}{3}$$

$$\log\left[-\frac{e}{2} - ie\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \operatorname{Log} e + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$$

$$= 1 + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$$

$$3\pi i \log\left(-\frac{e}{2} - ie\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\pi i - 3\pi\left(\frac{-2\pi}{3} + 2n\pi\right).$$

$$\left[\frac{-e}{2} - i\,\frac{e\sqrt{3}}{2}\right]^{3\pi i} = e^{3\pi i - 3\pi\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)} = e^{3\pi i}\, e^{-3\pi\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)}$$

$$= -e^{2\pi^2 - 6n\pi^2}$$

نعوض $n=0$ وبالتالي قيمة القيمة الأساسية للفرع الأساسي تكون $-e^{2\pi^2}$

تمرين (4): أوجد جميع قيم

* $\arcsin i$

الحل: نعلم أن

$$\arcsin z = -i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

$$\arcsin(i) = -i \log\left(-1 + \sqrt{2}\right)$$

$$= -i \log(\sqrt{2}-1) = -i\left[\log(\sqrt{2}-1) + i(0+2n\pi)\right]$$

$$= 2n\pi - i \log(\sqrt{2}-1) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

العدد (0) بالجزء التخيلي لعدد حقيقي موجب
$(\sqrt{2}-1)$ عدد حقيقي موجب فيتمثل بالقيمة
المطلقة فقط

أوجد جميع قيم

* $\arctan(1+i)$

نعلم أن

$$\arctan(z) = \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z} \quad ; z \neq \pm i$$

$$\arctan(1+i) = \frac{i}{2} \log\left(\frac{i+1+i}{i-1-i}\right) = \frac{i}{2} \log(-1-2i)$$

$$= \frac{i}{2}\left[\log|-1-2i| + i\left(\text{Arg}(-1-2i) + 2n\pi\right)\right]$$

$$= \frac{i}{2}\left[\log\sqrt{5} + i(\theta + 2n\pi)\right] = -\frac{1}{2}\left[\theta + 2n\pi\right] + \frac{i}{2}\log\sqrt{5}$$

$$= -\frac{1}{2}(\theta + 2n\pi) + i \log \sqrt[4]{5}$$

كشرط تحقق في العلامة

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{-1} = 2 \rightarrow \theta = \arctan 2 \quad ; \quad \boxed{-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}}$$

أوجد جميع قيم

* $\text{arc th}\left(\frac{3}{7} + i\frac{2\sqrt{3}}{7}\right)$

نعلم أن

$$\text{arc th}\, z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} \quad ; z \neq \pm 1$$

$$\text{arc th}\left(\frac{3}{7} + i\frac{2\sqrt{3}}{7}\right) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{3}{7} + i\frac{2\sqrt{3}}{7}}{1 - \frac{3}{7} - i\frac{2\sqrt{3}}{7}}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{10 + i2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}\,i} = \frac{1}{2} \log \frac{(10+i2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3}\,i)}{28}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{(40-12) + i(20\sqrt{3} + 8\sqrt{3})}{28} = \frac{1}{2} \log(1 + i\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log|1+i\sqrt{3}| + i\left(\text{Arg}(1+i\sqrt{3}) + 2n\pi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)\right]$$

$$= \log\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

تمرين (5):

اثبت أن

$$\arcsin z + \arccos z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

الحل:

نفرض $\arcsin z = w \Rightarrow z = \sin w$

$$z = \sin w = \cos\left(\frac{\pi}{2} - w\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - w + 2n\pi\right)$$

$$\arccos z = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - w + 2n\pi\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - w + 2n\pi$$

$$\arcsin z + \arccos z = w + \frac{\pi}{2} - w + 2n\pi$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

تمرين (6) اعتماداً على العلاقة العكسية أوجد حلول المعادلة :

* $\sin z = i$

الحل:

$$\sin z = i \Rightarrow z = \arcsin i$$

$$z = \arcsin(i) = -i\log\left(i \cdot i + \sqrt{1 - (i)^2}\right)$$

$$= -i\log\left(-1 + \sqrt{2}\right)$$

$$= -i\log(\sqrt{2} - 1) = -i\left[\log(\sqrt{2} - 1) + i\,2n\pi\right]$$

$$= 2n\pi - i\log\sqrt{2} - 1 = 2n\pi + i\log\sqrt{2} + 1$$

$$-\log\sqrt{2} - 1 = \log\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \log\frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \log\sqrt{2} + 1$$

* $\sin z = 7$

اذا كان

$$\sin z = 7 \Rightarrow z = \arcsin 7$$

$$= -i\log\left(i7 + \sqrt{1 - 49}\right) = i\log\left(i7 + \sqrt{-48}\right)$$

$$= i\log\left(i7 \pm i4\sqrt{3}\right) = -i\left[\log|(7 \pm 4\sqrt{3})i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2n\pi + i\log(7 \mp 4\sqrt{3})$$

$\star \quad \cos z = 2i$

$z = \arccos(2i) = -i \log(2i + i\sqrt{1+4})$

$= -i \log(2+\sqrt{5})i = -i\left[\log|\sqrt{5}+2|i + i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right]$

$= \frac{\pi}{2} + 2n\pi + i \log \sqrt{5} - 2$

$-\log(\sqrt{5}+2) = \log \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \log \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \log \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \log \sqrt{5}-2$

أوجد حلول المعادلة: $\cos z = -i\, sh 5$

إما بطريقة الدوال العكسية وهي مهمة لكل منا (الاستنتاج) لذلك نستخدم طريقة

$\cos x \, ch y - i \sin x \, sh y = -i\, sh 5$

حسب تساوي عددين عقديين نجد أن:

$(1) \ldots \cos x \, ch y = 0$

$(2) \ldots \sin x \, sh y = sh 5$

من (1) ... إما $ch y = 0$ مستحيلة لأن $\forall y \in R : ch y \geq 1$

أو $\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ نعوض في (2) ...

ch y, sh y

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) sh y = sh 5$

$\pm sh y = sh 5$

$sh y = -sh 5 \qquad sh y = sh 5$

$sh y = \pm sh 5 = sh(\pm 5) \rightarrow y = \pm 5$

$z = \frac{\pi}{2} + n\pi + i(\pm 5) \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

أوجد حلول المعادلة: $sh z = i\, ch z$

نفرض أن $z = x + iy$ عندئذ

$sh z = sh x \cos y + i\, ch x \sin y$

أي أن $sh x \cos y + i\, ch x \sin y = i\, ch 2$

إما $(1) \ldots sh x \cos y = 0$

أو $(2) \ldots ch x \sin y = ch 2$

إما $sh x = 0 \Leftarrow x = 0$ نعوض في (2)

$\operatorname{ch} x \sin y = \operatorname{ch} 2 \Rightarrow \sin y = \operatorname{ch} 2 > 1$ مستحيل

وإذا $\cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

نعوض في (2)

$$\operatorname{ch} x \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \operatorname{ch} 2$$

$$\operatorname{ch} x \, (\pm 1) = \operatorname{ch} 2$$

$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch} 2$ $\quad$ $\operatorname{ch} x = -\operatorname{ch} 2$ مستحيل لأن $\operatorname{ch} x \geq 1$

وبالتالي فإن

$$y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

ومنها فإن $; n = 0, \pm 1, \dots$

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch} 2 \Rightarrow x = 2$$

أي إن

$$z = x + iy = 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

نظري

المحاضرة السادسة

الفصل الرابع: الرسم بدلالة بعض الدوال البسيطة:

1. التحويلة $w = z + c$ ...(1)

حيث $c = c_1 + ic_2$ ثابت عقدي ؛ $z = x + iy$

فيان أي نقطة (x,y) ومن هذه التحويلة هي النقطة $(x+c_1 , y+c_2) = (u,v)$

نلاحظ بأن فيان أي نقطة (x,y) ومن هذه التحويلة هي النقطة $(x+c_1 , y+c_2)$ وهذه النقطة تنتج من النقطة (x,y) بانسحاب باتجاه المتجه الذي يمثل العدد العقدي الثابت (c) ومقدار هذا الانسحاب يساوي طويلة هذا المتجه.

ومن خلال ما سبق نستنتج أن التحويلة (1) تنقل الأشياء (المناطق) بشكل مطابق من المستوي العقدي z إلى المستوي العقدي w أي أن فيان أي مثلث هو مثلث مطابق له وفيان أي مستطيل هو مستطيل مطابق له وفيان أي دائرة هي دائرة مطابقة له .....

2. التحويلة: $w = \beta z$ ...(2)

β عدد عقدي ثابت.

يمكن وصف هذه التحويلة بشكل دقيق من خلال استخدام الاحداثيات القطبية فاذا فرضنا أن

$\beta = be^{i\beta}$, $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\varphi}$

استنادا إلى العلاقة (2) نجد أن

$$\rho e^{i\varphi} = be^{i\beta} re^{i\theta}$$
$$= b r e^{i(\beta+\theta)}$$

فيان أي نقطة (r,θ) ومن التحويلة (2) هي النقطة $(\rho,\varphi) = (br , \theta+\beta)$

وهذه النقطة تنتج كما نلاحظ من النقطة (r,θ) بدوران (مقداره β) أي بمقدار سعة العدد العقدي الثابت β.

وبالإضافة إلى هذا الدوران كما نلاحظ تمدد في الأطوال عندما $b = |\beta| > 1$

أو انكماش في الأطوال وذلك عندما $b = |\beta| < 1$

وتحافظ الأطوال على نفسها عندما $b = |\beta| = 1$

هذا يعني أن التحويلة (2) هي تحويلة دوران يرافق هذا الدوران تمدد أو انكماش في الأطوال وهذا يعني بدوره أن هذه التحويلة تنقل الأشكال من المستوي العقدي z إلى المستوي العقدي w بشكل مشابه.

3. التحويلة :

$$W = BZ + C \quad \ldots (3)$$

حيث B , C عددان عقديان ثابتان

إن هذه التحويلة هي التحويلة المحصلة للتحويلتين السابقتين، مما يعني بأن هذه التحويلة هي تحويلة دوران يرافقه تمدد أو انكماش في الأطوال متبوعاً بانسحاب وفق اتجاه المتجه الذي يمثل العدد العقدي الثابت C.

وهذا يعني أن هذه التحويلة والتي تدعى "التحويلة الخطية العامة" تنقل الأشكال من المستوي العقدي z إلى المستوي العقدي w بشكل مشابه

4. التحويلة :

$$w = \frac{1}{z} \quad : \quad z \neq 0$$

إذا كان $z = x + iy$ فإن

$w = u + iv$

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} \Rightarrow x = \frac{u}{u^2+v^2}$$

$$y = -\frac{v}{u^2+v^2}$$

إن خيال المنحنيات $a(x^2+y^2) + bx + cy + d = 0 \quad \ldots (*)$

وفق التحويلة $w = \frac{1}{z}$ هي المنحنيات :

$$a\left(\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right) + b\frac{u}{u^2+v^2} - c\frac{v}{u^2+v^2} + d = 0$$

ومنه فإن خيال المنحنيات (*) .. هي المنحنيات :

$$d(u^2+v^2) + bu - cv + a = 0$$

إن المنحنيات (*) عندما : $a \neq 0$, $d \neq 0$ تمثل معادلة دوائر لا تمر من نقطة الأصل فخيالها هي دوائر أيضاً لا تمر من نقطة الأصل.

عندما $a \neq 0$; $d = 0$ فالمنحنيات تمثل معادلة دوائر تمر من نقطة الأصل الخيال لهذه المنحنيات من الشكل التالي $bu - cv + a = 0$

وهي عبارة عن مستقيمات لا تمر من نقطة الأصل

عندما $a=0$ و $d\neq 0$ عندئذٍ فإن المنحنيات (*) هي المنحنيات

$$d(u^2+v^2)+bu-cv=0$$

وهي عبارة عن معادلة دوائر تمر بنقطة الأصل.

عندما $a=0$; $d=0$ عندئذٍ تصبح المنحنيات (*) تكون عبارة عن مستقيمات تمر بنقطة الأصل

والخيال في هذه الحالة هي المنحنيات $bu-cv=0$

وهي عبارة عن مستقيمات تمر بنقطة الأصل.

لتوسيع تعريف تطبيق الدالة $w=\frac{1}{z}$ بالشكل الآتي

$$T(z)=\begin{cases}\frac{1}{z} & \infty\neq z\neq 0\\ \infty & z=0\\ 0 & z=\infty\end{cases}$$

$T(0)=\infty$

في هذه الحالة تكون كل نقطة w من المستوي العقدي الموسع (المتد) خيال لنقطة واحدة وواحدة فقط من المستوي العقدي z.

هنا الشكل تحت قد اشتقاص المرحلة الآتية.

إن التحويل

$$T(z)=\begin{cases}\frac{1}{z} & 0\neq z\neq\infty\\ \infty & z=0\\ 0 & z=\infty\end{cases}$$

ينقل الدوائر من المستوي العقدي الممتد z إلى دوائر من المستوي العقدي الممتد w مع الأخذ بعين الاعتبار أن كل مستقيم في المستوي العقدي الممتد هو عبارة عن دائرة تمر بنقطة اللانهاية

مثال: أوجد خيال الدائرة $|z-i|=2$ وفق التحويلة $w=\frac{1}{z}$

الحل:

~~[illegible]~~

بما أن $w=\frac{1}{z}$ فإن $z=\frac{1}{w}$ ← $z-i=\frac{1}{w}-i$

أي أن

$$|z-i|=\frac{|1-iw|}{|w|}$$

Alnour

أي: مثال $2 = |z - i|$ هي مجموعة النقاط التي تحقق العلاقة

$$z = \frac{|1 - iw|}{|w|} \Rightarrow z|w| = |1 - iw|$$

نفرض أن $w = u + iv$ عندئذ:

$$2|u + iv| = |1 - i(u + iv)| = |1 + v - iu|$$

$$2\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{(1+v)^2 + (-u)^2}$$

$$4(u^2 + v^2) = (1+v)^2 + u^2 = 1 + 2v + v^2 + u^2$$

$$3(u^2 + v^2) - 2v = 1$$

$$u^2 + v^2 - \frac{2}{3}v = \frac{1}{3} \Rightarrow u^2 + v^2 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

$$u^2 + \left(v - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

وهذه معادلة دائرة مركزها $(0, \frac{1}{3})$; $R = \frac{2}{3}$

معادلة دائرة مركزها $(-1, 0)$ ونصف قطرها (1) تتحول إلى دائرة

مثال (2): أوجد خيال $|z + 1| = 1$

الحل: $w = \frac{1}{z} \leftarrow z = \frac{1}{w}$

$$z + 1 = \frac{1}{w} + 1 = \frac{1 + w}{w}$$

$$|z + 1| = \frac{|1 + w|}{|w|}$$; أي أن $|w| = |1 + w|$

نفرض أن $w = u + iv$ عندئذ

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{(1+u)^2 + v^2}$$

$$u^2 + v^2 = 1 + 2u + u^2 + v^2$$

$$u = -\frac{1}{2}$$

وهي معادلة مستقيم لا يمر من نقطة الأصل.
يمكن اعتباره دائرة ويمر من نقطة اللانهاية.

5" المحولة: $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ، $ad - bc \neq 0$ (1)

a, b, c, d ثوابت عددية.

تدعى المحولة الخطية الكسرية العامة أو تحويلة (موبيس).

* في الحالة التي تكون فيها العدد الثابت $c = 0$ عندئذ تأخذ المحولة (1) الشكل

أي المحولة الخطية العامة $w = Bz + c$ (2)

* أما في الحالة التي يكون فيها $c \neq 0$ فإن المحولة (1) تكتب على الشكل:

بعد قسمة البسط على المقام $w = \dfrac{a}{c} + \dfrac{cb - ad}{c} \cdot \dfrac{1}{cz+d}$ (3)

ولاحظ من هذا الشكل

يظهر لنا بوضوح أن الشرط $ad - bc \neq 0$ شرط أساسي لكي لا تكون المحولة (1) هي المحولة الثابتة.

من المحولة (1) نجد أنها تكتب على الشكل:

$Azw + Bw + Cz + D = 0$ (4)

إذا نظرنا إلى هذه العلاقة نلاحظ بالنسبة لـ w هي خطية

نلاحظ أن هذه العلاقة خطية بالنسبة لـ w وخطية بالنسبة لـ z لذلك المحولة (1) تدعى المحولة ثنائية الخطية

من العلاقة (1) نجد أن $z = \dfrac{-dw + b}{cw - a}$ (5)

من هذه العلاقة نستنتج أن النقطة $w = \dfrac{a}{c}$ هي النقطة الوحيدة التي ليست ظلاً لأي نقطة من المستوي العقدي z وفق المحولة (1).

إذا تم توسيع نطاق (1) بالشكل:

$$T(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & ; \ \infty \neq z \neq -\dfrac{d}{c} \\ \infty & ; \ z = -\dfrac{d}{c} \\ \dfrac{a}{c} & ; \ z = \infty \end{cases}$$

عندما $c \neq 0$

عندما $c = 0$ فإن $w = Bz + c$

عندئذ تكون كل نقطة w من المستوي العقدي الممتد ... $T(\infty) = \infty$

من خيال لنقطة واحدة وواحدة فقط من المستوي العقدي z

$$T^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{-dz+b}{cz-a} & ; \infty \neq z \neq \frac{a}{c} \\ \infty & z = \frac{a}{c} \\ \frac{-d}{c} & z = \infty \end{cases}$$

$T(-\frac{d}{c}) = \infty$

$-\frac{d}{c} = T^{-1}(\infty)$

ان التحويلة (1) يمكن وضعها بشكل دقيق من خلال التحويلات الآتية ،

$Z = cz + d \quad ; \quad W = \frac{1}{Z} \quad , \quad w = \frac{a}{c} + \frac{cb-ad}{c} W$

ان التحويلة (1) وكما نعلم هي التحويلة الخطية العامة ، وكما نعلم بأن هذه التحويلة تنقل الأشكال بشكل مشابه من المستوي العقدي z إلى المستوي العقدي w $Z = cz + d$

أما التحويلة الثانية فقد أثبتنا بأن هذه التحويلة تنقل الدوائر من المستوي العقدي z إلى المستوي العقدي w $W = \frac{1}{Z}$

أما التحويلة الثالثة فهي التحويلة الخطية العامة وهذه التحويلة كما نعلم بأنها تنقل الأشكال بشكل مشابه من هنا نستنتج ان التحويلة * تنقل الدوائر من المستوي العقدي z إلى المستوي العقدي w على اعتبار ان كل مستقيم هو عبارة عن دائرة تمر من نقطة اللانهاية .

يمكن اثبات على أنه إذا كان $w = \frac{az+b}{cz+d}$ $ad - bc \neq 0$

وكانت $W = \frac{a_1 w + b_1}{c_1 w + d_1}$ $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$

فإن الدالة المحصلة هي أيضاً تحويلة خطية كسرية

* مبرهنة ...:

. يوجد تحويل خطي كسري وحيد ينقل النقاط z_1, z_2, z_3 المختلفة مثنى مثنى الى النقاط w_1, w_2, w_3 على الترتيب والمختلفة مثنى مثنى، أي أن $z_1 \neq z_2 ; z_2 \neq z_3$

. وهذا التحويل يعطى بالصيغة

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \qquad (6)$$

. هذه المعادلة تكتب بالشكل:

$$(w-w_1)(w_2-w_3)(z-z_3)(z_2-z_1) = (w-w_3)(w_2-w_1)(z-z_1)(z_2-z_3)$$

. وبعد الاصلاح:

$$AZw + Bw + CZ + D = 0$$

. وهذه العلاقة هي تحويلة خطية كسرية

. نثبت أن صورة z_1 هي w_1 وأن صورة z_2 هي w_2 ، وأن صورة z_3 هي w_3

. من أجل $z = z_1$ نعوض

$$(w-w_1)(w_2-w_3)(z_1-z_3)(z_2-z_1) = 0$$

. لكن بما أن النقاط مختلفة مثنى مثنى نستنتج أن $w - w_1 = 0 \Rightarrow w = w_1$

. من أجل $z = z_3$ نعوض

$$0 = (w-w_3)(w_2-w_1)(z_3-z_1)(z_2-z_3)$$

. بما أن النقاط مختلفة مثنى مثنى نستنتج أن $w - w_3 = 0 \rightarrow w = w_3$

. من أجل $z = z_2$ نعوض

$$(w-w_1)(w_2-w_3)(z_2-z_3)(z_2-z_1) = (w-w_3)(w_2-w_1)(z_2-z_1)(z_2-z_3)$$

. ومنه نجد:

$$(w-w_1)(w_2-w_3) = (w-w_3)(w_2-w_1)$$

$$ww_2 - w_1w_2 - ww_3 + w_1w_3 = ww_2 - ww_1 - w_3w_2 + w_1w_3$$

$$ww_3 + w_1w_2 = ww_1 + w_3w_2$$

$$w(w_3 - w_1) = w_2(w_3 - w_1)$$

$$w = w_2$$ وهو المطلوب

Alnour

ملاحظة:

إذا كانت إحدى النقاط الثلاث z_1, z_2, z_3 هي نقطة اللانهاية ولنفرض على سبيل المثال هي z_1 وكذلك إذا كانت إحدى النقاط الثلاث w_1, w_2, w_3 هي نقطة اللانهاية ولنفرض أنها w_1.

عندئذ نعوض في العلاقة (٥) كل z_1 بـ $\frac{1}{z_1}$ وكل w_3 بـ $\frac{1}{w_3}$

ونفرض المقامات في الطرفين ونبسط ثم نعوض بالقيم المعطاة على أن نعوض عن z_1 بـ ٠ وعن w_1 بـ ٠.

مثال توضيحي:

أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط

$z_1 = i \quad z_2 = -i \quad z_3 = \infty$ من النقاط

$w_1 = 0 \quad w_2 = \infty \quad w_3 = 1$ على الترتيب

ثم أوجد خيال $x > 0$ تحت التحويلة المختلفة الناتجة.

الحل:

التحويلة الخطية الكسرية المطلوبة هي من الشكل:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

نعوض في هذه التحويلة كل z_3 بـ $\frac{1}{z_3}$ وكل w_2 بـ $\frac{1}{w_2}$ نعوض نجد

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{\frac{1}{w_2}-w_3}{\frac{1}{w_2}-w_1}=\frac{z-z_1}{z-\frac{1}{z_3}}\cdot\frac{z_2-\frac{1}{z_3}}{z_2-z_1}$$

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{1-w_2w_3}{1-w_1w_2}=\frac{z-z_1}{z_3z-1}\cdot\frac{z_3z_2-1}{z_2-z_1}$$

نعوض بالقيم المعطاة على أنه نعوض عن z_3 بصفر و w_2 بصفر نجد أن:

$$\frac{w-0}{w-1}\cdot\frac{1-0}{1-0}=\frac{z-i}{0-1}\cdot\frac{0-1}{-i-i}$$

$$\frac{w}{w-1} = \frac{z-i}{-2i}$$

$$-2iw = (w-1)(z-i) = wz - iw - z + i$$

$$-iw - wz = -z + i$$

$$w(-z-i) = -z+i \rightarrow w = \frac{z-i}{z+i}$$

$z_1 = i \rightarrow w_1 = 0$

$z_2 = -i \rightarrow w_2 = \infty$

عبارة $\boxed{w = \frac{z-i}{z+i}}$ $\leftarrow$ $z = \frac{-iw-i}{w-1}$

نعوض بالطريقة العكسية — نعزل z

$$\boxed{z = \frac{iw+i}{1-w}}$$

[illegible] $\frac{-dw+b}{cw-a}$

وبالتالي بفرض أن

$z = x+iy$; $w = u+iv$ عندئذ

$$x+iy = \frac{i(u+iv)+i}{1-u-iv} = \frac{-v+iu+i}{(1-u)-iv} = \frac{-v+i(u+1)}{(1-u)-iv}$$

$$x+iy = \frac{[-v+i(u+1)][(1-u)+iv]}{(1-u)^2+v^2}$$

$$= \frac{-v(1-u)-(u+1)v}{(1-u)^2+v^2} + i\,\frac{-v^2+1-u^2}{(1-u)^2+v^2}$$

$$x = \frac{-2v}{(1-u)^2+v^2} \quad ; \quad y = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}$$

وبالتالي فإن صورة $x \geq 0$ هي مجموعة النقاط:

$$\frac{-2v}{(1-u)^2+v^2} \geq 0 \Rightarrow -2v \geq 0 \Rightarrow v \leq 0$$

تعريف:

لتكن لدينا الدالة $w = f(z)$ نقول عن النقطة z_0 بالتعريف أنها نقطة ثابتة لهذه الدالة إذا وفقط إذا كان $f(z_0) = z_0$

يمكن الإثبات وبسهولة على أن التحويلة الخطية الكسرية العامة $w = \frac{az+b}{cz+d}$ تملك نقطتين ثابتتين على الأكثر

مثال :

أوجد النقاط الشاذة للدالة $w = -\frac{1}{2}$

$z = -\frac{1}{2} \Rightarrow z^2 = -1 = i^2$

$z = i \ , \ z = -i$

17 المحاضرة 4

تمرين (1) : أثبت أن $\frac{1}{2} \tan z \left(\cot \frac{z}{2} - \tan \frac{z}{2} \right) = 1$

علماً أن $z \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$

الحل : نعلم أن

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{2 \sin \frac{z}{2} \cdot \cos \frac{z}{2}}{\cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}}$$

وبالتالي فإن :

$$\frac{2 \frac{\sin z}{\cos z}}{1 - \tan^2 \frac{z}{2}} = \frac{2 \tan \frac{z}{2}}{1 - \tan^2 \frac{z}{2}} = \frac{2}{\cot \frac{z}{2} - \tan \frac{z}{2}}$$

نضرب الطرفين بالوسطين فنحصل :

نقسم الطرفين على 2 فنحصل على المطلوب $\tan z \left(\cot \frac{z}{2} - \tan \frac{z}{2} \right) = 2$

تمرين (2) : أثبت أن $\sin(\arc \cos z) = \sqrt{1 - z^2}$ نعلم أن

$$\sin w = \sqrt{1 - \cos^2 w}$$

وبالتالي فإن

$$\sin(\arc \cos z) = \sqrt{1 - \cos^2(\arc \cos z)} = \sqrt{1 - (\cos(\arc \cos z))^2} = \sqrt{1 - z^2}$$

تمرين (3) : احسب قيمة العبارة : $w = \cos\left[\arc tg \sqrt{3} + \arc \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$$\arc Tg \sqrt{3} = \frac{i}{2} \log \frac{i + \sqrt{3}}{i - \sqrt{3}} = \frac{i}{2} \log \frac{\sqrt{3} + i}{-\sqrt{3} + i}$$

نعلم أن : $\arc \tan z = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z}$; $z \neq \pm i$

$$= \frac{i}{2} \log \frac{(\sqrt{3} + i)(-\sqrt{3} - i)}{3 + 1} = \frac{i}{2} \log \frac{-3 + 1 - i\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{i}{2} \log -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\tan\theta = \sqrt{3}$

$\tan\frac{\pi}{3} = \theta$

$\theta = \frac{\pi}{3} + n\pi$

نعلم أن:

$$\log z = \log|z| + i(\theta + 2n\pi)$$

$$\log\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{Log}\left|-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$$

ملاحظة لما n=1 نحصل على الزاوية الأساسية للعدد المعقد هي $-\frac{2\pi}{3}$

أي أن:

$$\arctan\sqrt{3} = \frac{i}{2}\left[0 + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)\right]$$

$$\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} - n\pi$$

$$\arccos z = -i\log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)$$

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = -i\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\sqrt{1-\frac{3}{4}}\right)$$

$$= -i\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -i\left[\text{Log}\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right| + i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)\right]$$

$$= -i\left[0 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)\right] = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$$

وبالتالي فإن:

$$w = \cos\left[\frac{\pi}{3} - n\pi + 2n\pi\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \sin(n\pi) = 0$$

طريقة ثانية:

$$\arctan\sqrt{3} = \theta \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + n\pi \quad \text{أو} \quad \theta = -\frac{\pi}{3} + n\pi$$

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\varphi = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{أو} \quad \varphi = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$$

$$\cos\left[\frac{\pi}{3} + n\pi + \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2} + n\pi\right] = 0$$

$$w = \cos\left[-\frac{\pi}{3} + n\pi - \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right] = \cos\left[-\frac{\pi}{2} + n\pi\right] = 0$$

تمرين (4): أوجد النقطة الثابتة للدالة

$$w = f(z) = iz + 1 - i$$

الحل: النقطة الثابتة هي التي تحقق العلاقة

$$z = iz + 1 - i$$

$$z - iz = 1 - i \Rightarrow z(1-i) = 1 - i \Rightarrow z = 1$$

تمرين (5): أوجد خيال المستطيل المحدد بالمستقيمات $y=2\ ;\ y=0$

$x=0\ ;\ x=1$

وفق التحويلة $w=iz+1-i$

الحل:

نقاط المستطيل هي $A(1,0)$ ، $B(1,2)$ ، $C(0,2)$ ، $D(0,0)$

خيال النقطة A تناظر العدد العقدي $z=1$

نعوض النقاط خلال التحويلة

$w=iz+1-i$

$w_1=i(1)+1-i=1$

ما خيال هذه النقطة وفق التحويلة المعطاة هي النقطة $A'(1,0)$

العدد العقدي $z=1+2i$ يناظر النقطة B وخيال هذه النقطة وفق التحويلة المعطاة هي النقطة المناظرة للعدد العقدي

$w_2=i(1+2i)+1-i=i-2+1-i=-1$

ما خيال B هي النقطة $B'(-1,0)$

العدد العقدي الثالث $z=2i$ ما خيال النقطة التي تناظر العدد العقدي وفق التحويلة هي النقطة التي تناظر العدد العقدي

$w_3=i(2i)+1-i$

$=-2+1-i=-1-i$

أي النقطة $C'(-2,-1)$

العدد العقدي الرابع $z=$ النقطة التي تناظر هذا العدد هي D خيال هذه النقطة وفق التحويلة المعطاة

$w_4=i(0)+1-i=1-i$

أي النقطة $D'(1,-1)$

C B D A

دوران

خيال

B' A' C' D'

تمرين (6): أثبت أن التحويل $w = iz + i$

ترسم نصف المستوى $x \geq 0$ نحو نصف المستوى $v \geq 1$

الحل:

نفرض أن $z = x+iy$; $w = u+iv$ حيث

$u+iv = i(x+iy)+i = -y+ix+i = -y+i(x+1)$

وبالتالي فإن $v = x+1$; $u = -y$

وعليه $x > 0 \Rightarrow x+1 > 1 \Rightarrow u > 1$

أي أن خيال $x > 0$ هو $v > 1$

تمرين (7): أوجد صورة الشريحة نصف اللانهائية $x > 0$; $0 < y < 2$

بالتحويل $w = iz + 1$ (دوران، إضافة)

$y=2$

الحل:

نفرض أن $z = x+iy$; $w = u+iv$

$u+iv = i(x+iy)+1$

$= -y+ix+1 = 1-y+ix$

واستنادًا إلى تعريف تساوي عددين عقديين ينتج أن

$u = 1-y$; $v = x$

وعليه $x > 0 \Rightarrow v > 0$ وعليه $0 < y < 2$

ومنه فإن $0 > -y > -2 \Rightarrow 1 > 1-y > -1$

أي أن خيال $0 < y < 2$ هي $1 > u > -1$

وبالتالي فإن خيال الشريحة نصف اللانهائية $x > 0$; $0 < y < 2$

هي $x > 0$; $-1 < u < 1$

تمرين (8): أوجد صورة ربع المستوى $x > 1$; $y > 0$ بالتحويل $w = \frac{1}{z}$

الحل: نفرض أن $z = x+iy$

$w = u+iv$

Alnour

الربع الأول خيال خارج [illegible]
[illegible]

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} \Rightarrow x + iy = \frac{1}{u+iv} = \frac{u}{u^2+v^2} - i\frac{v}{u^2+v^2}$$

اعتماداً على تساوي عددين عقديين نجد أن :

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \quad ; \quad y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

وبما أن $1 < x$

أي أن $1 < \frac{u}{u^2+v^2}$

$$u^2 + v^2 < u$$

$$u^2 - v^2 - u < 0$$

$$u^2 - u + \frac{1}{4} + v^2 < \frac{1}{4}$$

$$(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 < \frac{1}{4}$$

وهذه النقاط تقع في داخلية الدائرة التي مركزها $(\frac{1}{2}, 0)$; $R = \frac{1}{2}$

وبما أن $-\frac{v}{u^2+v^2} > 0 \Leftarrow -v > 0 \Leftarrow v < 0$

أي أن خيال ربع المستوي $y > 0$, $x > 1$ هو مجموعة النقاط التي تحقق المتراجحة

$$(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 < \frac{1}{4}$$

تمرين (و) : أوجد صورة الشريحة نصف اللانهائية $1 \geq y \geq 0$; $0 \leq x$

وفق التحويل $w = \frac{i}{z}$ حالة خاصة من $w = \frac{az+b}{cz+d}$ ، $b = i$, $c = 1$, $d = a = 0$

الحل :

نفرض أن $z = x + iy$; $w = u + iv$ عندئذ

$$w = \frac{i}{z} \Rightarrow z = \frac{i}{w} = i\left(\frac{u}{u^2+v^2} - i\frac{v}{u^2+v^2}\right)$$

$$x + iy = \frac{u}{u^2+v^2} + i\frac{v}{u^2+v^2} \quad ; \quad x = \frac{u}{u^2+v^2} \quad ; \quad y = \frac{v}{u^2+v^2}$$

بما أن $0 \leq x \Leftarrow 0 \leq \frac{v}{u^2+v^2} \Leftarrow 0 \leq v$

أي أن $0 \leq y \leq 1$

$$0 \leq \frac{u}{u^2+v^2} \leq 1$$

من المتراجحة اليسرى نستنتج أن $0 \leq u$

$0 \leq \frac{u}{u^2+v^2}$

من المتراجحة الثانية نستنتج أن $\frac{u}{u^2+v^2} \leq 1 \Leftarrow u \leq u^2+v^2$

$\frac{1}{4} \leq (u-\frac{1}{2})^2+v^2 \rightarrow 0 \leq u^2-u+v^2$

وهذه النقاط تمثل النقاط التي تقع على وخارج الدائرة التي مركزها $(\frac{1}{2}, 0)$ ونصف قطرها $r=\frac{1}{2}$ أي أن صورة $0 \leq y \leq 1$; $0 \leq x$

هي $0 \leq v$; $0 \leq u$

و $\frac{1}{4} \leq (u-\frac{1}{2})^2 + v^2$

ح ٢٥ / ١١ / ٢٠١٩ م

المحاضرة الثامنة عشر

تحويل الدالة $w=\frac{1}{z}$

يمكن وصف هذه الدالة بشكل دقيق من خلال التحويلة $w=\bar{z}$, $z=\frac{z}{|z|^2}$

إن الدالة المحصلة لهاتين الدالتين ما هي إلا الدالة $w=\frac{1}{z}$

التحويلة الأولى: $z=\frac{z}{|z|^2}$

هي تحويلة انعكاس بالنسبة لدائرة الوحدة أي أن صورة أي نقطة من خارج دائرة الوحدة وفق التحويلة $z=\frac{z}{|z|^2}$ هي نقطة من داخل دائرة الوحدة

وبالعكس صورة أي نقطة من داخل دائرة الوحدة وفق التحويلة $z=\frac{z}{|z|^2}$ هي نقطة خارج دائرة الوحدة أما النقاط التي تقع على دائرة الوحدة عندئذ $|z|=1$ ← $|z|=\frac{1}{|z|}=1$

خيالها وفق التحويلة $z=\frac{z}{|z|^2}$ هي نقاط أيضاً تقع على دائرة الوحدة

+ أما التحويلة $w=\bar{z}$ فهي تحويلة انعكاس بالنسبة للمحور الحقيقي أي أن أي نقطة من نصف المستوي العلوي خيالها أو صورتها وفق التحويلة $w=\bar{z}$ هي نقطة تقع في نصف المستوي السفلي وبالعكس أي نقطة من نصف المستوي السفلي خيالها وفق التحويلة $w=\bar{z}$ هي نقطة تقع في نصف المستوي العلوي مما سبق نستنتج أن التحويلة $w=\frac{1}{z}$ تنقل

١- النقاط التي تقع في الربع الأول وخارج دائرة الوحدة إلى نقاط تقع داخل الربع الرابع وداخل دائرة الوحدة وبالعكس الرابع ...

2") النقاط التي تقع من الربع الأول وداخل دائرة الوحدة تحيلها ونستم التحويلة $w = \frac{1}{2}$ في نقاط تقع في الربع الرابع وخارج دائرة الوحدة وبالعكس (...)

3) النقاط التي تقع في الربع الثاني وخارج دائرة الوحدة تنتقل إلى الربع الثالث وخارج دائرة وبالعكس

4") النقاط التي تقع في الربع الثاني وداخل دائرة الوحدة تنتقل إلى الربع الثالث وخارج دائرة الوحدة وأما النقاط التي تقع على دائرة الوحدة وفي الربع الأول تنتقل إلى نقاط تقع على دائرة الوحدة وفي الربع الرابع وبالعكس.

النقاط التي تقع في الربع الثاني وعلى دائرة الوحدة فتنتقل إلى نقاط تقع في الربع الثالث وعلى دائرة الوحدة وبالعكس.

★ الدالة $w = z^2$

هذه الدالة يمكن وصفها بدقة باستخدام الاحداثيات القطبية $z = re^{i\theta}$

عندئذ $w = \rho e^{i\varphi}$ ، $\rho e^{i\varphi} = r^2 e^{i2\theta}$

$\rho = r^2$ ، $\varphi = 2\theta$

ومنه فإن خيال ربع المستوي الأول $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ هي النقاط $0 \leq \varphi \leq \pi$ هي نصف المستوي العلوي ومن هذه الحالة فإن الراسم $w = z^2$ راسم أحادي بمعنى أنه كل نقطة من $0 \leq \varphi \leq \pi$ هي خيال النقطة واحدة وواحدة فقط من $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

أما خيال نصف المستوي $0 \leq \theta \leq \pi$ هي مجموعة النقاط $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ هي المستوي العقدي بأكمله ومن هذه الحالة: فإن الراسم $w = z^2$ ليس راسم أحادي إذا أن هناك نقاط تقع على الجزء الموجب من المحور الحقيقي $(\varphi = 0)$ تكون خياله لنقطتين إحداهما تقع على الجزء الحقيقي الموجب والأخرى تقع على الجزء الحقيقي السالب

ماذا فرضنا أن $z = x + iy$ و $w = u + iv$ عندئذ

$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy$

وبالتالي فإن $u = x^2 - y^2$; $v = 2xy$

بناءً على هذا فإن خيال المنحنيات $x^2 - y^2 = c_1$ ، $c_1 \neq 0$

هي المنحنيات $u = c_1$ ⇐ $x^2 - y^2 = c_1$ قطع زائد متساوي الساقين

أما خيال المنحنيات: $2xy = c_2$ ، $c_2 \neq 0$

فهي المنحنيات $v = c_2$. وخيال هذه القطوع هي عبارة عن المستقيمات $u = c_1$

أما المنحنيات $2xy = c_2$ فسوف تعطي قطوع زائدة متساوية الساقين منسوبة إلى محاورها

سالبة = $(3+1)\,c$ موجبة = $(4+2)\,c$

وخيال هذه القطوع هي المستقيمات $v = c_2$

أما المستقيم $x = 0$ فخياله وفق التحويلة $w = z^2$ هي مجموعة النقاط $u = -y^2$; $v = 0$

وهذه النقاط تمثل الجزء السالب من المحور الأفقي

أما المستقيمات $y = 0$ فخيالها وفق التحويلة $w = z^2$ هي مجموعة النقاط $u = x^2 \geq 0$; $v = 0$

وهذه النقاط تمثل الجزء الموجب من المحور الأفقي

أما خيال المستقيمات $x = c_1$ ، $c_1 \neq 0$ هو مجموعة النقاط $u = c_1^2 - y^2$; $v = 2c_1 y$

وأوجد y من المعادلة $y = \frac{v}{2c_1}$ ، $c_1 \neq 0$ ونعوض في

$$u = c_1^2 - y^2 \Rightarrow u = c_1^2 - \frac{v^2}{4c_1^2} \Rightarrow u - c_1^2 = -\frac{1}{4c_1^2}(v - 0)^2$$

$$(u - u_0) = 2p(v - v_0)^2$$

وهو قطع مكافئ ذروته $(c_1^2, 0)$ وتقعره نحو الـ u^- ومحوره المحور u

* أما خيال المستقيمات $y = c_2$; $c_2 \neq 0$ وفق التحويلة $w = z^2$

هي مجموعة النقاط $u = x^2 - c_2^2$ ، $v = 2c_2 x \Leftarrow$

$$x = \frac{v}{2c_2} \xrightarrow{\text{نعوض}} u = \frac{v^2}{4c_2^2} - c_2^2$$

$$u - c_2^2 = \frac{1}{4c_2^2} v^2 \qquad (u - u_0) = 2p(v - v_0)^2$$

أي خياله هو قطع مكافئ ذروته $(-c_2^2, 0)$ محوره المحور u وتقعره نحو الـ u^+

* خيال المستقيمات $y = mx + p$ وفق التحويلة $w = z^2$ هي مجموعة النقاط

$u = x^2 - y^2$ ، $v = 2xy$

بالتعويض عن y : $v = 2x(mx + b)$ ، $u = x^2 - (mx + b)$

نأخذ $m = 1$ ، $u = -2xb - b^2$

$$u + b^2 = -2xb \rightarrow x = \frac{u+b^2}{-2b}$$

$$v = 2x(x+b) \rightarrow v = 2\left(\frac{u+b^2}{-2b}\right)\left(\frac{u+b^2}{-2b} + b\right)$$

$$v = \frac{1}{-b}(u+b^2)\left(\frac{u+b^2}{-2b} + b\right)$$

$$v = \frac{1}{2b^2}(u^2 - b^4) \rightarrow v + \frac{b^2}{2} = \frac{1}{2u^2} u^2$$

أي الخيال عبارة عن قطع مكافئ ذروته $(0, -\frac{b^2}{2})$ ، محوره المحرفي سنا متوكي v
متعمده نحو ال v^+.

عندما $m = -1$ سنحصل على معادلة من الشكل:

$$v - \frac{b^2}{2} = -\frac{1}{2b^2} u^2$$

قطع مكافئ ذروته $(0, +\frac{b^2}{2})$ ، محوره المحرفي v ومتعمده نحو ال v^-

الفصل الخامس : التكاملات في المساحات العقدية

1- تكامل دالة متغير حقيقي ذات قيم عقدية :

لتكن لدينا الدالة $F(t) = u(t) + i\,v(t)$ ... (1) ; $a \leq t \leq b$

لنفرض أن الدالتين u, v كل منها مستمر قطعياً (منقطعة قطعة) على المجال $[a,b]$
أي أن كل منها مستمرة على جميع نقاط المجال $[a,b]$ باستثناء عدد منته قد يكون نقطة
واحدة وقد يكون لانهاية باستثناء النقاط التي تجعل v, u غير مستمرة من نقاط $[a,b]$
وبشرط أن تكون النهايات الجانبية للدالتين عند نقاط عدم الاستمرار (يمين ويسرى) موجودة.

تكون الدالة $F(t)$ مستمرة قطعياً على $[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت الدالتان v, u
مستمرتان قطعة قطعة على هذا المجال ونعرف تكامل الدالة ...(1) بالعلاقة التالية
على المجال $[a,b]$.

$$* \quad \int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt \quad (1)$$

مستعملين العلاقات التالية

$$Re \int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b Re\, F(t)\,dt$$

$$Im \int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b Im\, F(t)\,dt$$

يمكن إثبات أن:

$$\int_a^b \gamma F(t)\,dt = \gamma \int_a^b F(t)\,dt \quad ; \quad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$$ ثابت عقدي

الإثبات:

ط $\quad \gamma F(t) = (\gamma_1 + i\gamma_2)(u(t) + i v(t))$

$$= (\gamma_1 u - \gamma_2 v) + i(\gamma_2 u + \gamma_1 v)$$

$$\int_a^b \gamma F(t)\,dt = \int_a^b (\gamma_1 u - \gamma_2 v)\,dt + i\int_a^b (\gamma_2 u + \gamma_1 v)\,dt$$

$$= \gamma_1 \int_a^b u\,dt - \gamma_2 \int_a^b v\,dt + i\gamma_2 \int_a^b u\,dt + i\gamma_1 \int_a^b v\,dt$$

$$= (\gamma_1 + i\gamma_2)\int_a^b u\,dt + i^2 \gamma_2 \int_a^b v\,dt + i\gamma_1 \int_a^b v\,dt$$

$$= (\gamma_1 + i\gamma_2)\int_a^b u(t)\,dt + i\left(\gamma_1 \int_a^b v\,dt + i\gamma_2 \int_a^b v\,dt\right)$$

$$= (\gamma_1 + i\gamma_2)\int_a^b u(t)\,dt + i(\gamma_1 + i\gamma_2)\int_a^b v(t)\,dt$$

$$= \gamma \int_a^b F(t)\,dt$$

2. لنثبت أن:

$$\left| \int_a^b F(t)\,dt \right| = \int_a^b |F(t)|\,dt$$

إذا رمزنا للطرف الأيسر من المعادلة الأولى بالعدد العقدي $r_0 e^{i\theta_0}$

عندئذ

$$r_0 = \left| \int_a^b F(t)\,dt \right|$$

وبالتالي فإن

$$r_0 e^{i\theta_0} = \int_a^b F(t)\,dt$$

نضرب طرفي المساواة بـ $e^{-i\theta_0}$ نجد أن

$$r_0 = e^{-i\theta_0} \int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b e^{-i\theta_0} F(t)\,dt$$

وبالاستفادة من

$$Re \int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b Re\, F(t)\,dt$$

نجد أن

$$r_0 = \int_a^b Re\, e^{-i\theta_0} F(t)\,dt$$

Alnour

باستعمال أن $\text{Re}\, e^{-i\theta_0} F(t) \leq |\text{Re}\, e^{-i\theta_0} F(t)| \leq |e^{-i\theta_0} F(t)|$

أي أن

$$\text{Re}\, e^{-i\theta_0} F(t) \leq |F(t)| \rightarrow$$

$$\int_a^b \text{Re}\, e^{-i\theta_0} F(t)\, dt \leq \int_a^b |F(t)|$$

أي أن

$$r_0 \leq \int_a^b |F(t)|\, dt$$

وبالتالي

$$\left| \int_a^b F(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |F(t)|\, dt$$

* المنحنيات أو الأقواس:

نقول عن مجموعة النقاط (x, y) بأنها تشكل قوس C أو منحنى C إذا وفقط إذا كانت $x = x(t)$; $y = y(t)$ حيث أن

$x(t)$ و $y(t)$ دوال متصلة على المجال $[a,b]$ وحيث الاستمرار على طرفي المجال هو الاستمرار من اليمين عند (a) والاستمرار من اليسار عند (b)، وعندئذ نعبر عن المنحنى C بالعلاقة الآتية $Z(t) = x(t) + i\, y(t)$ $\quad a \leq t \leq b$

وعليه فإن كل من $x(t)$ و $y(t)$ دوال متصلة عندئذ $Z(t)$ دالة متصلة على المجال $[a,b]$. مثال: الدائرة (منحنى جوردن = قوس بسيط مغلق)

تعريف: نقول عن المقوس C أنه قوس بسيط إذا وفقط إذا لم يقطع هذا القوس نفسه أي يلزم أن يكون $Z(t_1) \neq Z(t_2)$ طالما أن $t_1 \neq t_2$

- نقول عن المقوس C أنه قوس بسيط مغلق إذا كان هذا القوس لا يقطع نفسه أي إذا كان $Z(t_1) \neq Z(t_2)$ طالما أن $a < t_1 < t_2 < b$ وكانت $Z(a) = Z(b)$

الدائرة تعطى وسيطياً بالعلاقة

$$Z(t) = R \cos t + i R \sin t$$

Alnour

* إذا كانت معادلة القوس C معطاة بالعلاقة

$$z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad a \le t \le b$$

نقول عن $z(t)$ أنه تابع قابل للاشتقاق إذا وفقط إذا كانت كل من $x = x(t)$ و $y = y(t)$ هي دوال قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ والمشتقة الأولى تعطى بالعلاقة

$$z'(t) = x'(t) + i\,y'(t) \qquad a \le t \le b$$

نقول عن القوس C أنه قوس أملس إذا كانت الدالة $z(t)$ تملك مشتقة من الرتبة الأولى متصلة على المجال $[a,b]$ وكانت $z'(t) \neq 0$

$$\forall\, z \in [a,b]$$

إن طول القوس C المعطى بالعلاقة

$$z(t) = x(t) + i\,y(t) \quad : \quad a \le t \le b$$

نرمز له بـ ℓ حيث

$$\ell = \int_a^b |z'(t)|\, dt$$

* الكفاف: هو عبارة عن قوس أملس هذا القوس يتكون من عدد منته من الأقواس الملساء المتصلة ببعضها مع بعض نهاية بداية.

$$z(t) = \begin{cases} t + it & 0 \le t \le 1 \\ t + i & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$z_1 = 0 \quad , \quad z_2 = 1 + i \qquad z_3 = 2 + i$

الكفاف المغلق: هو قوس أملس بسيط مغلق (مثل يكون دائرة أو مربع (ذو أقواس))
(الكفاف: يكون قوس أملس جزئي)

كل كفاف بسيط مغلق يقسم نقاط المستوي العقدي إلى نطاقين أحدهما ندعوه النطاق الداخلي: وهي مجموعة النقاط التي تقع على يسار متحرك يدير اتجاهه هذا الكفاف المغلق بالاتجاه الموجب للدوران.

أما الأخرى فندعوه النطاق الخارج وهي النقاط التي تقع على يمين المتحرك الذي يريد أنه يرسم هذا النطاق في الاتجاه الموجب للدوران.

* يتأمل أي كفاف $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ ، $a \le z \le b$

كفاف آخر نرمز له بـ $-c$ والكفاف الذي بدايته نهاية الكفاف c ونهايته بداية الكفاف الأول c أما معادلته فنحصل عليها من معادلة الكفاف c باستبدال كل t بـ $-t$.

$-b \le t \le -a$ ، $z(-t) = x(-t) + i\,y(-t)$

Scanned by CamScanner

المحاضرة الثامنة:

التكامل الخطي:

لتكن $f(z)$ دالة متغير عقدي. وليكن c كفاف بسيط يصل من z_1 إلى z_2 عندئذ

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz \qquad \text{أو} \qquad \int_c f(z)\,dz$$

نسميه التكامل الخطي للدالة f على الكفاف الواصل من z_1 إلى z_2.

حيث هذا التكامل سيعتمد على شكل الدالة f من جهة وبالكفاف c من جهة ثانية.

وهذا التكامل يعطى بالعلاقة

$$\int_c f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\,dt \qquad \dots (2)$$

حيث أن معادلة الكفاف c هي

$$z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad : \qquad a \le t \le b$$

ولكن

$$f(z(t)) \cdot z'(t) = \left[u(x(t), y(t)) + i\, v(x(t), y(t))\right](x'(t) + i\,y'(t))$$
$$= u x' - v y' + i(v x' + u y')$$

$$\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\,dt = \int_a^b (u x' - v y')\,dt + i\int_a^b (v x' + u y')\,dt$$

$$= \int_a^b u x'\,dt - \int_a^b v y'\,dt + i\int_a^b v x'\,dt + \int_a^b u y'\,dt$$

$$= \int_c u\,dx - v\,dy + i\int_c v\,dx + u\,dy \qquad \dots \star$$

بعض خواص التكامل الخطي:

$$\int_{-c} f(z)\,dz = -\int_c f(z)\,dz$$

$$\int_c \left[f(z) + g(z)\right] dz = \int_c f(z)\,dz + \int_c g(z)\,dz$$

إذا كان c كفاف بسيط مكون من كفافين متتاليين

إذا كانت الدالة $f(z)$ محدودة على المنحنى C أي يوجد عدد M حيث أن $|f(z)| \leq M$. حيث L هو طول المنحنى C

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq M\int_a^b |dz| = M.L \quad ; \quad L = \int_a^b |z'(t)|\,dt$$

أي أن قيمة التكامل لا يمكن أن تتعدى الجداء $M.L$

تمرين (1) . أوجد قيمة التكامل $\int_C z^2\,dz$

1". حيث C هي القطعة المستقيمة الواصلة من $z_1=0$ إلى $z_2=2+i$

2". حيث C هي عبارة عن قطعتين مستقيمتين الأولى C_1 تمتد من $z=0$ إلى $z=2$ الثانية C_2 تمتد من $z=2$ إلى $z=2+i$

أي أن التكامل في هذه الحالة له نفس البداية ونفس النهاية.

3". حيث C تتكون من ثلاث قطع مستقيمة

. C_1 تمتد من $z=0$ إلى $z=2$:

. C_2 تمتد من $z=2$ إلى $z=2+i$

. C_3 تمتد من $z=2+i$ إلى $z=0$

$\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = t$

$y-y_1 = \frac{(x-x_1)}{x_2-x_1}(y_2-y_1)$

الحل:

حسب القاعدة (2) . $\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$

[1] . علماً أن C هو عبارة عن قطعة مستقيمة تمتد من $z_1=0$ إلى $z_2=2+i$

ونحن نعلم أن معادلة هذه القطعة تعطى بالعلاقة :

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad \text{حيث} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z(t) = 0 + t(2+i-0) = \underset{x(t)}{2t} + i\underset{y(t)}{t}$$

وبالتالي فإن $z'(t) = 2+i \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1$

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$$

$$f(z(t)) = 4t^2 - t^2 + i\,2(2t)(t) = 3t^2 + i\,4t^2 = (3+i4)\,t^2$$

$$\int_C z^2\,dz = \int_0^1 (3+i4)\,t^2\,(2+i)\,dt = (3+i4)(2+i)\int_0^1 t^2\,dt$$

$$= (3+4i)(2+i)\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = (3+4i)(2+i)\,\frac{1}{3} - 0$$

$$= \frac{(6-4) + i(3+8)}{3} = \frac{2+11i}{3}$$

2 اعتماداً على

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

الحل

$$\int_{z=0}^{z=2+i} z^2\,dz = \int_{z=0}^{z=2} z^2\,dz + \int_{z=2}^{z=2+i} z^2\,dz$$

حيث C_1 القطعة المستقيمة التي تصل $z_1=0$ إلى $z_2=2$

$$\int_{z=0}^{z=2} z^2\,dz = \int_{C_1} z^2\,dz$$

معادلة القطعة C_1 هي

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \qquad 0 \le t \le 1$$ دائماً

$$z(t) = 0 + t(2-0) = 2t \qquad 0 \le t \le 1$$

$$z'(t) = 2 \qquad 0 \le t \le 1$$

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$f(z(t)) = 4t^2 - 0 + i\,2(2t)0 = 4t^2$$

$$\int_{C_1} z^2\,dz = \int_0^1 4t^2 \cdot 2\,dt = 8\int_0^1 t^2\,dt = \frac{8}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{8}{3}$$

$$\int_{z_2=2}^{z_3=2+i} z^2\,dz = \int_{C_2} z^2\,dz$$

نحسب الأخير التكامل

معادلة C_2 القطعة هي $0 \le t \le 1$

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$$ طريقة أخرى، معادلة $x=2$

$$z(t) = 2 + t(2+i-2) = 2+it$$ $\rightarrow z(t) = 2+it,\ 0\le t\le 1$

$z(t) = 2 + i3t \quad 0 \le t \le \frac{1}{3}$ ← أيضاً

$$z'(t) = i$$

$$f(z(t)) = x^2 - y^2 + 2ixy = z^2$$

$$f(z(t)) = 4 - t^2 + i(2)(2)(t) = (4-t^2) + i4t$$

لكن

$$\int_C z^2\,dz = \int_0^1 \left[(4-t^2) + i4t\right] i\,dt$$

$$= i\left[\int_0^1 (4-t^2)\,dt + i\int_0^1 4t\,dt\right]$$

Alnour

$$= i\left[4t - \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + i\,2t^2\Big|_0^1\right] = i\left[(4-\tfrac{1}{3}) + i2\right] = -2 + \frac{11}{3}i$$

$$\int_C z^2\,dz = \frac{8}{3} + \left(-2 + \frac{11}{3}i\right) = \frac{2 + i(11)}{3}$$

3''

$$\int_C z^2\,dz = \int_{C_1} z^2\,dz + \int_{C_2} z^2\,dz + \int_{C_3} z^3\,dz$$

ولكن نعلم أن

$$\int_{-C} z^2\,dz = -\int_C z^2\,dz$$

$$\int_C z^2\,dz = \frac{8}{3} + \left(-2 + i\frac{11}{3}\right) - \left(\frac{2+11i}{3}\right) = 0$$

تمرين (2) احسب قيمة التكامل $\int_C \bar{z}\,dz$

أولاً: حيث C هي النصف العلوي من الدائرة $|z| = 2$ والذي يمتد من $z = 2$ إلى $z = -2$

2- حيث C هي النصف السفلي من الدائرة $|z| = 2$ يمتد من $z = -2$ إلى $z = 2$

3- حيث C هي الدائرة $|z| = 2$ مرسومة مرة واحدة في الاتجاه الموجب للدوران.

الحل:

1° إن معادلة الدائرة $|z| = 2$ هي $z(t) = 2e^{it} \quad 0 \le t \le 2\pi$

وبالتالي فإن النصف العلوي معادلته تكون $z(t) = 2e^{it} \quad 0 \le t \le \pi$

وبالتالي فإن معادلة النصف العلوي من الدائرة $|z| = 2$ والذي يمتد من $z = 2$ إلى $z = -2$

تكون الدوران بالاتجاه السالب $z(t) = 2e^{-it} \quad -\pi \le t \le 0$

$z'(t) = -i2e^{-it} \quad -\pi \le t \le 0$

$f(z) = \bar{z} = \overline{(2e^{-it})} = 2e^{it} \qquad \overline{(e^{z})} = e^{\bar{z}}$

نعوض في العلاقة

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_{-\pi}^{0} 2e^{it}\left(-i2e^{-it}\right)dt = -4i\int_{-\pi}^{0} dt = -4i\,t\Big|_{-\pi}^{0} = -4\pi i$$

2° معادلة الدائرة هي $|z| = 2 \;;\; z(t) = 2e^{it} \quad 0 \le t \le 2\pi$

وبالتالي فإن معادلة نصف السفلي من الدائرة السابقة والذي يمتد من $z = -2$ إلى $z = 2$

$z(t) = 2e^{it} \quad \pi \le t \le 2\pi$

X $-\pi \le t \le 0$

Alnour

$$z'(t) = i2e^{it} \qquad \pi \le t \le 2\pi$$

$$f(z) = \bar{z} = \overline{(2e^{it})} = 2e^{-it}$$

$$\int_C \bar{z}\, dz = \int_{\pi}^{2\pi} 2e^{-it}(i2e^{it})\, dt = 4i\int_{\pi}^{2\pi} dt = 4i\pi$$

3. معادلة الدائرة هي

$$z(t) = 2e^{it} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$z'(t) = i2e^{it}$$

$$f(z(t)) = \bar{z} = \overline{(2e^{it})} = 2e^{-it}$$

$$\int_C \bar{z}\, dz = \int_0^{2\pi} 2e^{-it}\, i2e^{it}\, dt = 4i\int_0^{2\pi} dt = 8\pi i$$

من خلال التمرين السابق نلاحظ أن قيمة التكامل بالتمرين الأول لم تتغير عندما تغير المسار الذي يصل بين البداية والنهاية.

٢. بينما في التمرين الثاني فإن قيمة التكامل تغيرت بتغير المسار الذي يصل بين البداية والنهاية والسبب في ذلك: إن الدالة المستخدمة في التمرين الأول هي دالة تحليلية بينما الدالة المستخدمة في التمرين الثاني هي دالة غير تحليلية.

• قيمة التكامل للدالة التحليلية لا تتغير بتغير المسار (المنحنى).

أما إذا كانت غير تحليلية فإن قيمة هذا التكامل تتغير بتغير المسار.

ملاحظة (2): من التمارين السابقة نلاحظ أن قيمة التكامل لدالة تحليلية على أي منحنى مغلق يساوي الصفر أما قيمة تكامل الدالة غير التحليلية على منحنى مغلق فليس من الضروري أن يكون مساوياً للصفر.

قاعدة غرين

لتكن $P(x,y)$ ، $Q(x,y)$ دالتين حقيقيتين مستمرتين ولها مشتقات جزئية من الرتبة الأولى بالنسبة لـ x, y مستمرة أيضاً على المكان المغلق المحيط C ومن داخله C
وإذا رمزنا لـ D بداخلية C فإن قاعدة غرين تنص على:

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

إذا كانت الدالة f تحليلية على منحنى C وكانت f' دالة متصلة على منحنى C

فعندئذٍ وما استناداً على العلاقة ★

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i \int_C v\,dx + u\,dy$$

$$\int_C u\,dx - v\,dy = -\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$\int_C v\,dx + u\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy$$

وبما أن f تحليلية فإن الدالة f قابلة للاشتقاق وهذا يعني أن شرطا كوشي ريمان محققان أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ومنها أن

$$\left.\begin{aligned} \int_C u\,dx - v\,dy = 0 \\ \int_C v\,dx + u\,dy = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$$

وبهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة الآتية.

مبرهنة: إذا كانت الدالة $f(z)$ دالة تحليلية على وضمن المنحنى المغلق البسيط C وكان $f'(z)$ دالة متصلة فعندئذٍ تكامل على

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

وهذه المبرهنة تعرف بمبرهنة كوشي. بعد ذلك

قام العالم جورسات وطور هذه المبرهنة حيث أسقط اتصال f'

وعرفت بعد ذلك المبرهنة بمبرهنة كوشي جورسات للمناطق البسيطة الترابط

نقول عن المنطقة D إنها بسيطة الترابط: إذا كانت المجموعة المتممة لا تتكون من مجموعتين

واحدة مثل:

معادلة دائرة $|z-2| \leq 3$

وهي منطقة مترابطة.

أما إذا كانت المجموعة المتممة تتكون من مجموعتين أو أكثر فعندئذ ندعو المنطقة منطقة متعددة

الترابط وليست بسيطة الترابط. $1 < z < 2$

مثال: مجموعة النقاط التي تحقق $1 \leq |z| \leq 2$ وهذه ليست بسيطة الترابط

مجموعة النقاط التي تقع خارج دائرة الوحدة وضمن قطرها 2.

تمرين (1): أثبت أن

$$\int_{\alpha}^{\beta} dz = \beta - \alpha$$

حيث المنحني الذي يصل من $z_1 = \alpha$ إلى $z_2 = \beta$ هو عبارة عن كفاف بسيط

الحل:

لنفرض أن معادلة هذا الكفاف هي $a \leq t \leq b$

$$z(t) = x(t) + i\,y(t)$$

$$\alpha = z(a) = x(a) + i\,y(a)$$

$$\beta = z(b) = x(b) + i\,y(b)$$

وباعتماد على العلاقة:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

يكون

$$\int_{\alpha}^{\beta} dt = \int_a^b (x'(t) + i\,y'(t))\,dt = \int_a^b x'(t)\,dt + i\int_a^b y'(t)\,dt$$

$$= x(t)\Big|_a^b + i\,y(t)\Big|_a^b = x(b) - x(a) + i(y(b) - y(a))$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} dz = x(b) + i\,y(b) - (x(a) + i\,y(a)) = \beta - \alpha$$

تمرين (2): أثبت أن

$$\int \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

حيث C هي الدائرة $|z - z_0| = R$

الحل : إن معادلة الدائرة وسيطياً هي

$$z - z_0 = Re^{it}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z' = iRe^{it}$$

$$\int_c \frac{dz}{z - z_0} = \int_a^b \frac{dt}{Re^{it}} (iRe^{it}) = i\int_0^{2\pi} dt = it \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

المحاضرة التاسعة عشر

عشري ١٠/١

التكامل غير المحدد :

لتكن الدالة $f(z)$ دالة متغير عقدي تحليلية على النطاق D ، ولتكن z_0 نقطة ثابتة من هذا النطاق ولتكن أيضاً z نقطة ما من نقاط هذا النطاق .

ولنصل بين z_0 و z بمسارين مختلفين أحدهما c_1 والآخر c_2 . عندئذ المنحنيات c_1، c_2 يشكلان كنتور مغلق بسيط . وعندئذ يكون تكامل

$$\int_{c_1} f\,dz + \int_{-c_2} f\,dz = 0$$

$$\int_{c_1} f(z)\,dz = -\int_{-c_2} f(z)\,dz = \int_{c_2} f(z)\,dz$$

هذا يؤكد لنا من جهة أولى أن قيمة تكامل دالة تحليلية لا تختلف باختلاف المسار الذي يصل بين البداية والنهاية

$$\int_{z_0}^{z} f(s)\,ds = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$$

حيث s هو نقاط الكنتور المغلق c_1، c_2 .

هذا يعني أن التكامل الثابت يعرف لنا ~~التكامل~~ دالة متغيرها هو الحد العلوي

$$F(z) = \int_{z_1}^{z} f(s)\,ds$$

لنثبت الآن أن $F(z)$ دالة تحليلية بالتالي يجب أن نثبت أن الدالة قابلة للاشتقاق وسنثبت أيضاً أن

$$F'(z) = f(z)$$

لإثبات ذلك :

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)\,ds - \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$$

$$= \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds + \int_{z}^{z_0} f(s)\,ds$$

. $(z+\Delta z)$ تقع ضمن النطاق D ، قريبة كفاية من z

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z}^{z+\Delta z} f(s)\,ds$$

. ومن ناحية

$$f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} ds$$

. وبالتالي فإن

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(s)\,ds - \frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} ds$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\,ds$$

. بما أن f تحليلية فإنها قابلة للاشتقاق وبما أنها قابلة للاشتقاق فهي متصلة
. وبما أنها قابلة للاتصال فهذا يعني أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن مقدار
. $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$ مادام كانت النقطة $z+\Delta z$ قريبة قرباً كافياً من z
. أي $|\Delta z| < \delta$ وبالتالي فإن

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \leq \frac{1}{|\Delta z|}\,\varepsilon\,|\Delta z|$$

. أي أن

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon$$

. هذا يعني أن

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = 0$$

. أي أن $F'(z) = f(z)$

. ومن هنا نستنتج أن الدالة $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$ هي دالة تحليلية والمشتقة الأولى لهذه
. الدالة تساوي قيمة الدالة المستكملة عند الحد العلوي ، أي أن الدالة $F(z)$ ماهي إلا تكامل
. غير محدد للدالة f $F(z) = \int f(z)\,dz$

. والتي تكامل محدد لدالة تحليلية ماهو إلا التغير الذي يطرأ على الدالة الأصلية للدالة المستكملة
. بين حدي التكامل وهذا يعني

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(s)\,ds = \int_{z_0}^{\beta} f(s)\,ds + \int_{\alpha}^{z_0} f(s)\,ds$$

$$= \int_{z_0}^{\beta} f(s)\,ds - \int_{z_0}^{\alpha} f(s)\,ds = F(\beta) - F(\alpha) = F(z)\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

مثال توضيحي:

$$\int_0^{2+i} z^2\,dz = \frac{z^3}{3}\Big|_0^{2+i}$$

ح: لأنه الدالة هي دالة شاملة أي تحليلية في كل نقطة من نقاط المستوى المعقد ويمكننا عندها
الحل مباشرة دون استخدام القانون

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,dt\ z'(t)$$

$$= \frac{(2+i)^3}{3} = \frac{1}{3}(2+i)(2+i)^2 = \frac{1}{3}(2+i)(3+4i)$$

$$= \frac{1}{3}\left[6-4+i(8+3)\right] = \frac{2+11i}{3}$$

مثال (2): أوجد قيمة التكامل

$$\int_{-1}^{1} 2z\,e^{z^2}\,dz$$

ح: إن الدالة هي حاصل ضرب دالتين (كثيرة حدود من الدرجة الأولى)
(والدالة الأسية) وكلاهما دالة تحليلية وبالتالي حاصل ضرب التحليليتين هو دالة تحليلية
وبالتالي نحسب الدالة الأصلية للتكامل مباشرة.

$$= e^{z^2}\Big|_{-1}^{1} = e^1 - e^1 = 0$$

مثال (3): أوجد قيمة التكامل

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin z\, e^{i\cos z}\,dz$$

الدالة المستكملة دالة تحليلية لأنه حاصل ضرب دالتين تحليليتين
لذلك نجد قيمة هذا التكامل بإيجاد الفرق الذي يطرأ على الدالة
الأصلية بين حدي التكامل $\cos z = t$

$$= -\frac{1}{i}\, e^{i\cos z}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{1}{i}\left[e^{i\frac{1}{\sqrt{2}}} - e^{i\frac{1}{\sqrt{2}}}\right] = i\left[e^{i\frac{1}{\sqrt{2}}} - e^{i\frac{1}{\sqrt{2}}}\right] = 0$$

بنفس الطريقة نجد قيمة التكامل

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin z\, e^{i\cos z}\,dz$$

$$= i\left[e^{-i\frac{1}{\sqrt{2}}} - e^{i\frac{1}{\sqrt{2}}}\right] = -i\left[e^{i\frac{1}{\sqrt{2}}} - e^{-i\frac{1}{\sqrt{2}}}\right] = -2(i)(i)\left[\frac{e^{i\frac{1}{\sqrt{2}}} - e^{-i\frac{1}{\sqrt{2}}}}{2i}\right.$$

$$= 2\sin\frac{1}{\sqrt{2}}$$

صيغة تكامل كوشي البسيطة:

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل الكفاف المغلق البسيط C ولتكن z_0 نقطة من داخلية هذا الكفاف عندئذ

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{s-z_0}\,ds$$

حيث s هي نقاط المنحني C

البرهان:

نحيط النقطة z_0 بدائرة C_0 نصف قطرها صغير بقدر كاف عندئذ تكون الدالة $\frac{f(s)}{s-z_0}$ دالة تحليلية على C و C_0 والنقاط التي تقع بينهما.

وبالتالي اعتمادًا على صيغة تكامل كوشي [illegible] للمناطق متعددة الترابط يكون

$$\int_C \frac{f(s)}{s-z}\,ds=\int_{C_0}\frac{f(s)}{s-z}\,ds=\int_{C_0}\frac{f(z_0)+f(s)-f(z_0)}{s-z_0}\,ds$$

$$=\int_{C_0}\frac{f(z_0)}{s-z_0}\,ds+\int_{C_0}\frac{f(s)-f(z_0)}{s-z_0}\,ds=f(z)\int_{C_0}\frac{dz}{s-z_0}+\int_{C_0}\frac{f(s)-f(z_0)}{s-z_0}\,ds$$

$$=f(z)\,2\pi i+$$

نبين الآن أن التكامل الموجود في الطرف الأخير يساوي الصفر.

علمًا أن الدالة f تحليلية فهي قابلة للاشتقاق وبالتالي فهي متصلة. وهذا يعني أنه من أجل كل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث $|f(s)-f(z_0)|<\varepsilon$ طالما $|s-z_0|<\delta$

$r<\delta$ $\quad |s-z_0|=r$ التكملة بالصفحة ←

* المناطق البسيطة الترابط والمناطق متعددة الترابط:

نقول عن نطاق بسيط أنه نطاق بسيط الترابط إذا وفقط إذا كانت المنطقة [illegible] مجموعة واحدة $1\leq|z|$ تكملة من المحاضرة السابقة.

* مبرهنة بدون برهان:

ليكن C كفاف مغلق بسيط الترابط ولتكن $C_j\ (j=1,\dots,n)$ كفافات بسيطة مغلقة تقع في داخلية الكفاف C وغير متقاطعة مثنى مثنى $C_j\cap C_k=\phi$ عندما $(j\neq k)$

ولتكن f دالة تحليلية على C وبداخلية C باستثناء النقاط التي تقع في داخلية الكفافات C_j (لمساحتها) ولنرمز بـ B لـ C موجهًا بالاتجاه الموجب و $C_j\ (j=1,2,\dots,n)$ موجهة بالاتجاه السالب الدوران حينئذ

$$\int_B f(z)\,dz=0$$

تعرف مبرهنة كوشي [illegible] للمناطق متعددة الترابط.

$$\int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{-c_2} f(z)\,dz + \dots + \int_{-c_n} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{c} f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \dots + \int_{c_n} f(z)\,dz$$

أي أن التكامل على المنحنى يساوي إلى مجموع التكاملات على المنحنيات الداخلية.

تكملة البرهان . نستطيع اختيار العدد δ بحيث يكون $r < \delta$ فإن الدالة $|s-z_0| < \delta$ تقع في داخلية الجوار
وعليه فإن المتراجحة المبينة تكون صحيحة من أجل أي نقطة من نقاط هذا الجوار وكذلك

$$\left| \int_{c_0} \frac{f(s)-f(z_0)}{s-z_0}\,ds \right| \leq \int_{c} \frac{|f(s)-f(z_0)|}{|s-z_0|}\,ds = \frac{\varepsilon}{r}\, 2\pi r = 2\pi\varepsilon$$

وعندما ε تسعى نحو الصفر فإن قيمة التكامل يساوي الصفر.
أي أن

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c} \frac{f(s)}{s-z_0}\,ds$$

هذه العلاقة تعرف بصيغة كوشي البسيطة.

مثال : أوجد قيمة التكامل .

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z}\,dz$$

الحل : المنحنى المعطى هو دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي الواحد
. النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة $z=0$
وبالتالي نطبق صيغة تكامل كوشي فإن

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z-0}\,dz = 2\pi i \cos z \Big|_{z=0} = 2\pi i \cos(0) = 2\pi i$$

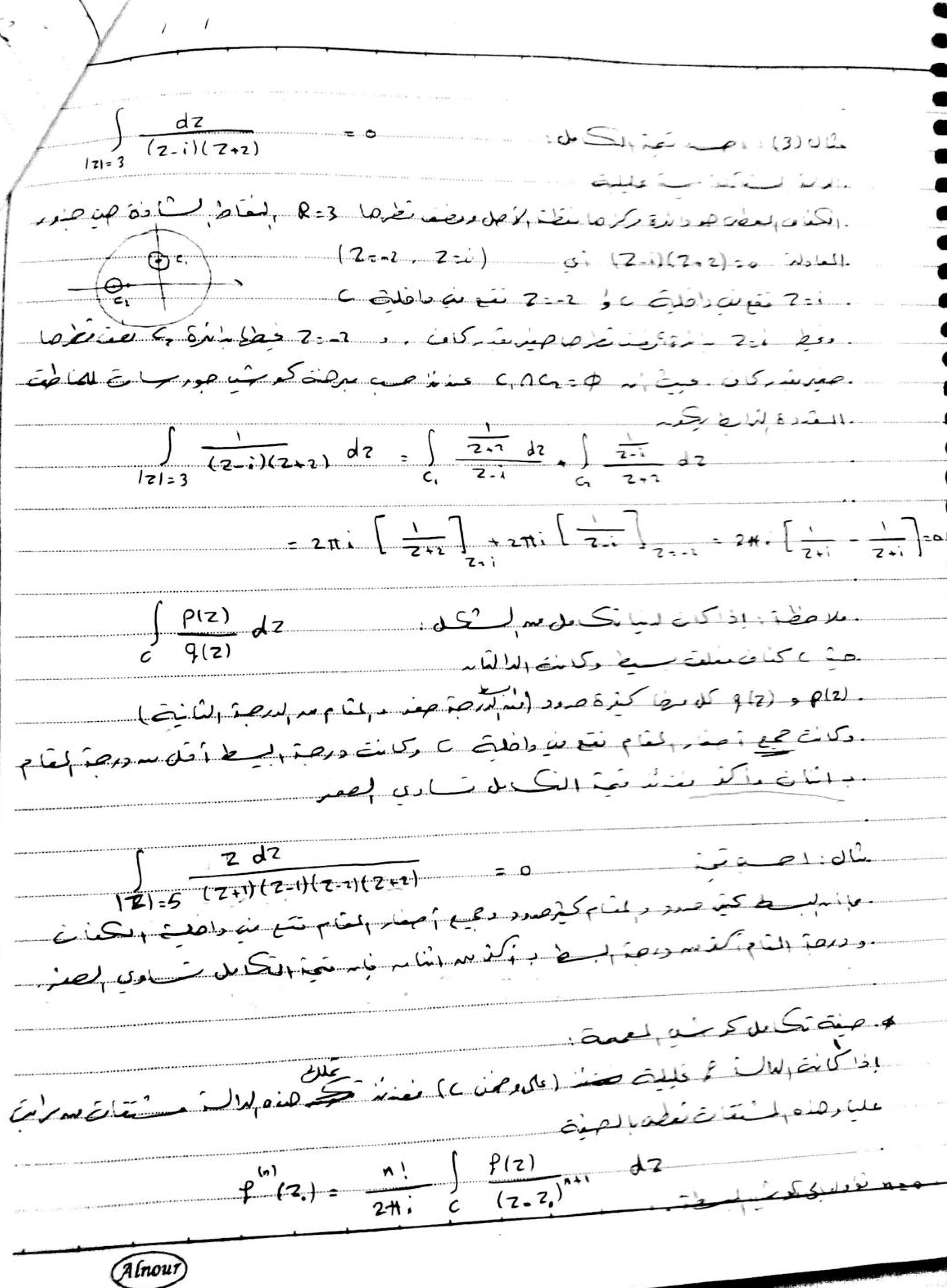
مثال (2) : أوجد قيمة التكامل :

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z}}{(z-1)(z-3)}\,dz$$

الحل :
المنحنى المعطى هو دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R=2$
النقاط الشاذة هي $z=1$, $z=3$ ونلاحظ أن $z=1$ تقع في داخلية
المنحنى بينما $z=3$ تقع في خارجية المنحنى

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z}}{(z-1)(z-3)}\,dz = \int_{|z|=2} \frac{\frac{e^{z}}{z-3}}{z-1}\,dz = 2\pi i \left[\frac{e^{z}}{z-3}\right]_{z=1} = 2\pi i\, \frac{e}{-2}$$

$$= -i\pi e$$



مثال (3): احسب قيمة التكامل:

$$\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z-i)(z+2)} = 0$$

الدالة ليست تحليلية

الكفاف المعطى هو دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R=3$ والنقاط الشاذة هي جذور المعادلة $(z-i)(z+2)=0$ أي $(z=i \,,\, z=-2)$

$z=i$ تقع في داخلية c و $z=-2$ تقع في داخلية c

نحيط $z=i$ بدائرة c_1 و $z=-2$ بدائرة c_2 نصف قطرها صغير بقدر كاف، حيث إن $c_1 \cap c_2 = \phi$ عندئذ حسب مبرهنة كوشي حول مساحات للمناطق المتعددة الترابط يكون

$$\int_{|z|=3} \frac{1}{(z-i)(z+2)}\, dz = \int_{c_1} \frac{\frac{1}{z+2}}{z-i}\, dz + \int_{c_2} \frac{\frac{1}{z-i}}{z+2}\, dz$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{z+2}\right]_{z=i} + 2\pi i \left[\frac{1}{z-i}\right]_{z=-2} = 2\pi i \left[\frac{1}{2+i} - \frac{1}{2+i}\right] = 0$$

ملاحظة: إذا كان لدينا تكامل من الشكل:

$$\int_c \frac{p(z)}{q(z)}\, dz$$

حيث c كفاف مغلق بسيط وكانت الدالتان

$p(z)$ و $q(z)$ كل منهما كثيرة حدود (البسط من الدرجة صفر والمقام من الدرجة الثانية)

وكانت جميع أصفار المقام تقع في داخلية c وكانت درجة البسط أقل من درجة المقام باثنان فأكثر عندئذ قيمة التكامل تساوي الصفر

مثال: احسب قيمة

$$\int_{|z|=5} \frac{z\, dz}{(z+1)(z-1)(z-2)(z+2)} = 0$$

بما أن البسط كثير حدود والمقام كثير حدود وجميع أصفار المقام تقع في داخلية الكفاف ودرجة المقام أكبر من درجة البسط بأكثر من اثنان فإن قيمة التكامل تساوي الصفر.

* صيغة تكامل كوشي العامة:

إذا كانت الدالة f تحليلية ضمن (على وضمن c) فعندئذ تكون لهذه الدالة مشتقات من أي رتبة عليها وهذه المشتقات تعطى بالصيغة

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

صيغة تكامل كوشي العامة.

مثال (1): احسب قيمة التكامل:

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz$$

$3 = n+1 \Leftarrow n = 2$

$$\int_C \frac{\cos z}{z^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!}\left[\cos z\right]''_{z=0}$$

$$= \pi i\left[-\sin z\right]'_{z=0} = \pi i\left[-\cos z\right]_{z=0} = -\pi i$$

مثال (2):

$$\int_{|z|=5} \frac{e^z}{(z-1)^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!}\left[e^z\right]'_{z=1} = 2\pi i \cdot e = 2e\pi i$$

المحاضرة التاسعة عشر ٤. عطوي

تمرين (١): احسب قيمة التكامل

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3+z}\, dz$$

الحل: المنحنى المعطى هو الدائرة التي مركزها $z=0$ و $R=2$

النقاط الشاذة هي جذور المعادلة $z^3+z=0$

$z(z^2+1)=0$

إما $z=0$ أو $z^2+1=0 \Leftarrow z^2=-1 \Leftarrow z=i$ أو $z=-i$

وهذه النقاط الثلاثة تقع من داخلية المنحنى المعطى

نحيط $z=0$ بدائرة c_1 نصف قطرها صغير بقدر كاف

ونحيط $z_2=i$ بدائرة c_2 نصف قطرها " "

" $z_3=-i$ بدائرة c_3

لكي يكون $c_j \cap c_k = \phi$ $(j,k=1,2,3)$ عندئذ حسب مبرهنة كوشي

حول مركز النقاط متعددة الترابط

$$\int_c \frac{\cos z}{z^3+z}\, dz = \int_{c_1} \frac{\frac{\cos z}{z^2+1}}{z-0}\, dz + \int_{c_2} \frac{\frac{\cos z}{z(z+i)}}{z-i}\, dz + \int_{c_3} \frac{\frac{\cos z}{z(z-i)}}{z+i}\, dz$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\cos z}{z^2+1}\right]_{z=0} + 2\pi i \left[\frac{\cos z}{z(z+i)}\right] + 2\pi i \left[\frac{\cos z}{z(z-i)}\right]_{z=-i}$$

$$= 2\pi i\,(1) + 2\pi i \left(\frac{\cos i}{i(2i)}\right) + 2\pi i \left(\frac{\cos -i}{-i(-2i)}\right)$$

$$= 2\pi i - \pi i\, ch(1) + \pi i\, ch(1) = 2\pi i\, [1 - ch(1)]$$

تمرين (٢): احسب قيمة التكامل

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3-z^2}\, dz$$

الحل: المنحنى المعطى هو الدائرة التي مركزها $(0,0)$

ونصف قطرها $R=2$. النقاط الشاذة هي جذور المعادلة $z^2(z-1)=0$

ومنه إما $z=0$ أو $z=1$

وهاتان النقطتان تقعان من داخلية المنحنى

نحيط $z=0$ بدائرة c_1 نصف قطرها صغير بقدر كاف

" $z=1$ " c_2

لكي يكون $c_1 \cap c_2 = \phi$

Alnour

عندنا حسب مبرهنة كوشي لمجموعات المناطق المتعددة الترابط يكون :

$$\int_C \frac{\cos z}{z^3 - z^2}\,dz = \int_{C_1} \frac{\frac{\cos z}{z-1}}{z^2}\,dz + \int \frac{\frac{\cos z}{z^2}}{z-1}\,dz$$

$$= \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{\cos z}{z-1}\right]'_{z=0} + 2\pi i\left[\frac{\cos z}{z^2}\right]_{z=1}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-\sin z(z-1) - \cos z}{(z-1)^2}\right)_{z=0} + 2\pi i\,\frac{\cos(1)}{(1)}$$

تمرين (3) : احسب قيمة التكامل

$$\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^3 + (1-i)z^2 - iz}$$

الحل :

التكامل يعطى على الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $R=3$

النقاط الشاذة هي صفر المعادلة $z^3 + (1-i)z^2 - iz = 0$

$z\left(z^2 + (1-i)z - i\right) = 0$

إما $z=0$ أو $\left(z^2 + (1-i)z - i\right) = 0$

$z^2 + (1-i)z - i = 0$

$\Delta = (1-i)^2 - 4(1)(-i) = -2i + 4i = 2i$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2i}$

$2i = 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] =$

$(2i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right] \qquad k=0,1$

من أجل $k=0$ يكون $A_1 = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = 1+i$

$k=1 \qquad A_2 = \sqrt{2}\left[\cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4}\right] = -1-i$

$z_2 = \frac{-1+i+1+i}{2} = \frac{2i}{2} = i$

$$z_3 = \frac{-1+i-1-i}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

وبالتالي فإن النقاط الشاذة للدالة الشاذة هي $z=0\ ;\ z=-1\ ,\ z=i$
وهذه النقاط تقع في داخلية الكفاف، والتكامل لمعظم

$$\int_{C_2} \frac{p(z)}{q(z)}\, dz$$

حيث $p(z)\ ,\ q(z)$ كثيرات حدود ودرجة المقام أكبر من درجة البسط بـ 2 وأكثر وجميع أصفار المقام تقع في داخلية C لذلك فإن

$$\int_{|z|=3} \frac{1}{z^3+(1-i)z^2+z}\, dz = 0$$

تمرين:

احسب قيمة التكامل $\int_\gamma x\, dz$

حيث

$$\gamma : z(t) = \begin{cases} 1+it & 0 \le t \le 1 \\ (2-t)+i & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

الحل:

حسب خواص التكامل:

$$\int_\gamma x\, dz = \int_{\gamma_1} x\, dz + \int_{\gamma_2} x\, dz$$

لحساب التكامل نعتمد على

$$\int_{\gamma_1} x\, dz = \qquad \int_{z_1}^{z_2} F(z)\, dz = \int_a^b F(z(t))\, z'(t)\, dt$$

$$\gamma_1 ,\quad z(t) = 1+it \qquad 0 \le t \le 1$$

$$z'(t) = i \qquad 0 \le t \le 1$$

$$f(z) = x \to F(z(t)) = 1$$

$$\int_{\gamma_1} x\, dz = \int_0^1 1 \cdot i\, dt = i\int_0^1 dt = it\Big|_0^1 = i$$

لحساب قيمة التكامل على γ_2 $\qquad 1 \le t \le 2$

$$\gamma_2 : (z(t)) = (2-t)+i \quad \to z'(t) = -1$$

$$F(z(t)) = 2-t$$

$$\int_0^2 (2-t)(-1)\,dt = \int_1^2 (t-2)\,dt = \frac{t^2}{2} - 2t \Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{4}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = -\frac{4}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_\gamma x\,dz = -\frac{1}{2} + i$$

تمرين: احسب قيمة التكامل: $\int_\gamma x\,dz$

حيث γ هي القطعة المستقيمة الممتدة من 1 إلى i

الحل:

$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \qquad 0 \leq t \leq 1$

$z(t) = 1 + t(i - 1) \qquad 0 \leq t \leq 1$

$z(t) = 1 - t + it \qquad 0 \leq t \leq 1$

نكتبها بالشكل: $z(t) = x(t) + i y(t)$

$z'(t) = -1 + i \qquad 0 \leq t \leq 1$

$f(z(t)) = 1 - t$

$$\int_\gamma x\,dz = \int_0^1 (1-t)(-1+i)\,dt = (-1+i)\int_0^1 (1-t)\,dt$$

$$= (-1+i)\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = (-1+i)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{-1}{2} + \frac{i}{2}$$

تمرين: أثبت أن $\int_C (2z^3 + 2z)\, e^{z^2}\,dz = 4i\cos z$

حيث C هي القطعة المستقيمة الواصلة بين $z = 1 - i$ و $z = 1 + i$

اعتماداً على هذه الخاصية

$$\int_\alpha^\beta F(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha) = F(z)\Big|_\alpha^\beta$$

$\cos z =$

الشكل المعطى يمكن حسابه من خلال العلاقة السابقة

لأن الدالة المستكملة هي دالة تحليلية

نفرض أن $z^2 = t \Rightarrow 2z\,dz = dt$

ومنه بأن $\int (2z^3+2z)\, e^{z^2}\, dz = \int (t+1)\, e^{t}\, dt = \int t e^t + \int e^t$

. التكامل الأول يمكن حسابه بالتكامل بالتجزئة

. نفرض أن $t = u \Rightarrow dt = du$ — $e^t = v \Rightarrow dv = e^t\, dt$

$$\int (2z^3+2z)\, e^{z^2}\, dz = t e^t - \int e^t\, dt + \int e^t\, dt$$
$$= t e^t = z^2 e^{z^2}$$

. ومنه بأن

$$\int_{1-i}^{1+i} (2z^3+2z)\, e^{z^2}\, dz = z^2 e^{z^2} \Big|_{1-i}^{1+i} = (1+i)^2 e^{(1+i)^2} - (1-i)^2 e^{(1-i)^2}$$
$$= 2i e^{2i} + 2i e^{-2i}$$

* تمرين: ليكن لدينا

$$G(z) = \int_C \frac{s^2 - s + 2}{s - z}\, ds$$

. ليكن C كفاف مغلق بسيط و z نقطة داخلية

. احسب $G(1)$ و $G'(i)$ و $G''(-i)$

الحل: اعتماداً على صيغة تكامل كوشي المعطاة يكون

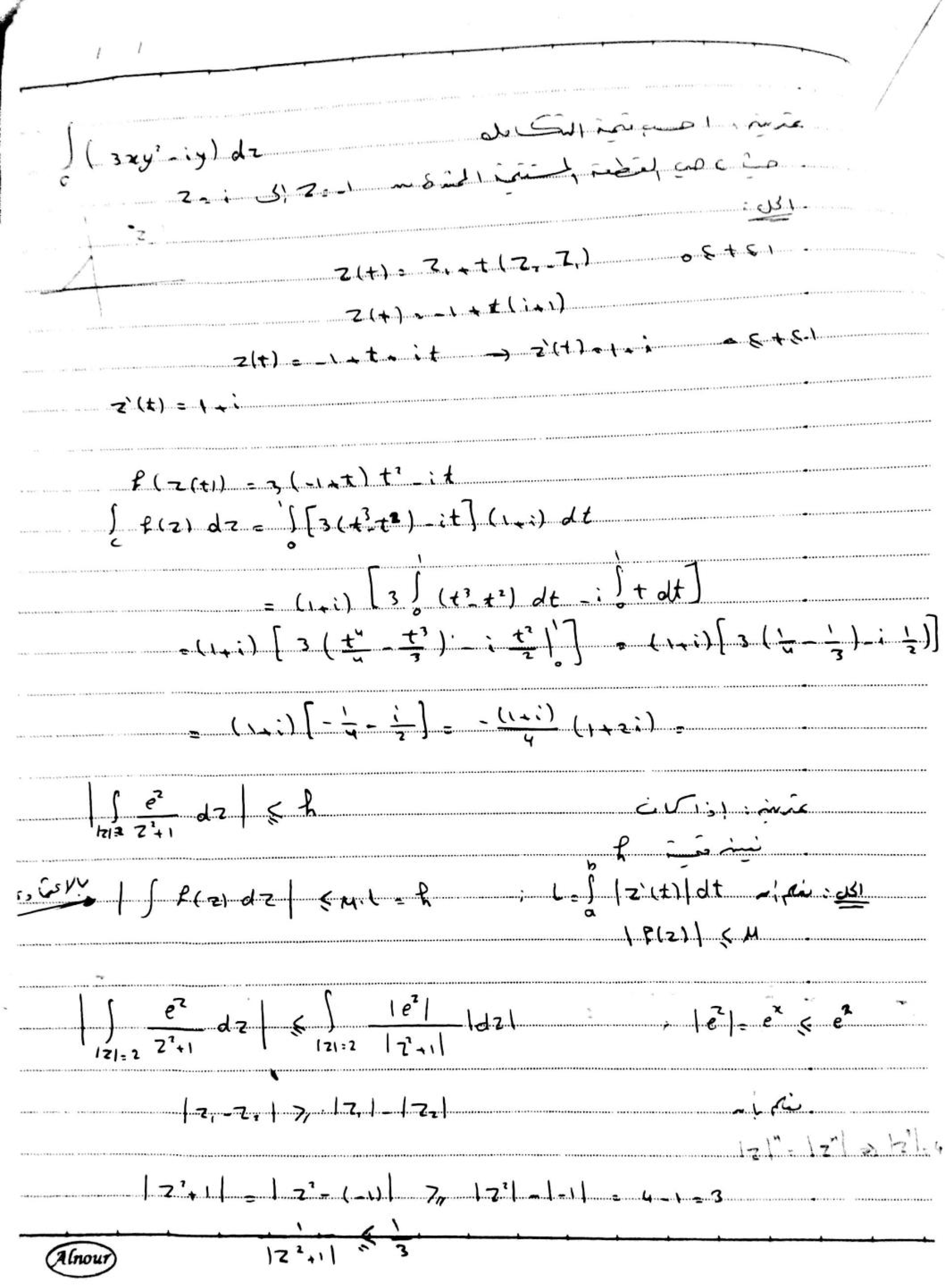
$$\int_C \frac{s^2-s+2}{s-z}\, ds = 2\pi i\, (s^2 - s + 2)_{s=z}$$
$$= 2\pi i\, (z^2 - z + 2)$$

. أي أن

$$G(z) = 2\pi i\,(z^2 - z + 2) \Rightarrow G(1) = 2\pi i\,(1 - 1 + 2) = 4\pi i$$

$$G'(z) = 2\pi i\,(2z - 1) \qquad G'(i) = 2\pi i\,(2i - 1) = -4\pi - 2\pi i$$

$$G''(z) = 4\pi i \Rightarrow G''(-i) = 4\pi i$$



تمرين: احسب قيمة التكامل

$$\int_C (3xy^2 - iy)\, dz$$

حيث C هي القطعة المستقيمة الممتدة من $z = -1$ إلى $z = i$

الحل:

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \qquad 0 \le t \le 1$$

$$z(t) = -1 + t(i+1)$$

$$z(t) = -1 + t + it \rightarrow z'(t) = 1 + i \qquad 0 \le t \le 1$$

$$z'(t) = 1 + i$$

$$f(z(t)) = 3(-1+t)t^2 - it$$

$$\int_C f(z)\, dz = \int_0^1 \left[3(t^3 - t^2) - it\right](1+i)\, dt$$

$$= (1+i)\left[3\int_0^1 (t^3 - t^2)\, dt - i\int_0^1 t\, dt\right]$$

$$= (1+i)\left[3\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3}\right) - i\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right] = (1+i)\left[3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) - i\frac{1}{2}\right]$$

$$= (1+i)\left[-\frac{1}{4} - \frac{i}{2}\right] = -\frac{(1+i)}{4}(1+2i) =$$

تمرين: إذا كان

$$\left|\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1}\, dz\right| \le h$$

نبين قيمة h

الحل: نستخدم

$$\left|\int f(z)\, dz\right| \le M \cdot L = h \quad ; \quad L = \int_a^b |z'(t)|\, dt$$

$$|f(z)| \le M$$

$$\left|\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1}\, dz\right| \le \int_{|z|=2} \frac{|e^z|}{|z^2+1|}\, |dz| \qquad , \; |e^z| = e^x \le e^2$$

نستخدم

$$|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$$

$$|z|^n = |z^n|$$

$$|z^2+1| = |z^2 - (-1)| \ge |z^2| - |-1| = 4 - 1 = 3$$

$$\frac{1}{|z^2+1|} \le \frac{1}{3}$$

Alnour

$$\left| \int_{|z|=1} \frac{e^2\, dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{e^2}{3} \int_{|z|=2} |dz| = \frac{e^2}{3}\, 4\pi = \frac{4\pi}{3} e^2 = h$$

$$\int_{|z|=2} |dz| = 4\pi$$

تمرين: احسب نتيجة التكامل:

$$\int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$$

حيث c المنحنى المغلق البسيط المعطى بالعلاقة

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y$$

الحل: المنحنى المعطى معادلته هي

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0 \longrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

وهي معادلة دائرة مركزها $(1,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{2}$

النقاط الشاذة: هي جذور المعادلة $(z-1)^2 \cdot (z^2+1) = 0$

إما $(z-1)^2 = 0 \longrightarrow z = 1$

أو $(z^2+1) = 0 \longrightarrow z_3 = i \quad z_4 = -i$

وعليه

$$|1+i-(-i)| = |1+2i| = \sqrt{5} > \sqrt{2}$$

فالنقطة $z_4 = -i$ تقع خارج الدائرة أما البقية تقع في الداخل

تقع في الداخل $z = 1 \rightarrow$

$$|1+i-1| = |i| = 1 \leq \sqrt{2}$$

نحيط $z = 1$ بدائرة c_1 نصف قطرها صغير بشرط أن

$z_3 = i$ بدائرة c_2

بحيث أن $c_1 \cap c_2 = \phi$

$$\int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} = \int_{c_1} \frac{\frac{1}{z^2+1}}{(z-1)^2}\, dz + \int_{c_2} \frac{\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}}{(z-i)}\, dz$$

$$\int \frac{\frac{1}{(z-1)(z^2+1)}}{z-1}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} \left[\frac{1}{z^2+1}\right]'_{z=1} + 2\pi i \left[\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}\right]_{z=i}$$

$$= 2\pi i \quad \frac{-2}{2}$$

Alnour